

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

LES RÔLES DE LA PERCEPTION, DE LA VISUALISATION ET DES
CONNAISSANCES SPATIALES DANS LA COMPRÉHENSION DU VOLUME DES
SOLIDES USUELS, DE SES FORMULES ET DE SON CALCUL

MÉMOIRE

PRÉSENTÉ

COMME EXIGENCE PARTIELLE

DE LA MAÎTRISE EN MATHÉMATIQUES

PAR

STEVE TREMBLAY

NOVEMBRE 2016

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de ce mémoire se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.10-2015). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

« There is no understanding without visulization »
(Duval, 2002)

REMERCIEMENTS

Dans un premier temps, je remercie mon directeur de recherche, le professeur Denis Tanguay, pour son aide apportée durant ces deux ans et demi de maîtrise en mathématiques. Ses connaissances en géométrie de l'espace et sa passion pour l'enseignement des mathématiques m'ont guidé dans chacune des étapes de ma recherche.

Une mention spéciale à deux étudiants des cycles supérieurs, Sarah Mathieu-Soucy et François Lagacé, qui ont su m'accueillir au début de mes études de maîtrise, ainsi que pour nos échanges fructueux dans les cours, qui se sont souvent poursuivis lors des pauses entre deux périodes.

Je remercie également les professeurs du département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal et plus particulièrement Doris Jeannotte, Jérôme Proulx, Jean-François Maheux, Fernando Hitt, Caroline Lajoie ainsi que Stéphane Cyr, qui m'ont apporté de l'aide à un moment ou à un autre de mes études de maîtrise.

Enfin, je remercie les membres de ma famille, qui ont m'ont toujours soutenu tout au long de ma recherche.

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	xiii
LISTE DES TABLEAUX.....	xx
RÉSUMÉ	xxi
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I	
PROBLÉMATIQUE	5
1.1 Situation globale du problème de recherche	5
1.2 Le problème de l'enseignement de la géométrie de l'espace, vécu comme enseignant.....	6
1.2.1 Difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à déterminer une mesure manquante.....	7
1.2.2 Difficulté à décoder la représentation d'un objet 3D lorsqu'elle est donnée sur papier.....	10
1.2.3 Difficulté à visualiser et à se construire une image mentale.....	11
1.2.4 Difficulté à dessiner un objet 3D par une technique de représentation lorsque le problème posé n'est donné qu'en mots et qu'une mesure est manquante.....	12
1.3 Des habiletés à préciser.....	17
1.3.1 Première habileté : la perception spatiale.....	17
1.3.2 Deuxième habileté : la visualisation.....	18
a) Visualisation externe (directe).....	18

	b) Visualisation mentale (interne) provenant d'un processus de créations d'images mentales.....	20
	i) Visualisation mentale des constituants d'un solide.....	21
	ii) Capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D.....	22
	iii) Capacité à visualiser les développements plans (patrons) et les projections orthogonales d'un objet 3D.....	24
1.3.3	Troisième habileté : les connaissances spatiales.....	28
1.4	La géométrie dans l'espace et le volume : ce qu'en dit le MELS.....	30
1.4.1	Recension des locutions clés sur la géométrie 3D et le volume.....	31
1.4.2	Concepts et processus prescrits par le MELS.....	34
1.4.3	Discussion sur les compétences du MELS.....	35
	a) Les locutions « sens spatial », « visualisation » et « image mentale ».....	35
	b) La compétence « connaissances spatiales ».....	37
1.5	Deux études de la communauté des chercheurs.....	38
1.6	Énoncé du problème de recherche.....	42
1.7	Questions de recherche.....	44
CHAPITRE II		
CADRE THÉORIQUE		45
2.1	Analyse des concepts-clés et revue de littérature.....	45
2.1.1	Les images mentales.....	46
2.1.2	Les représentations mentales d'objets géométriques 3D.....	49
2.1.3	Différences entre figure, dessin et représentation.....	51
2.2	Développement de trois habiletés en géométrie tridimensionnelle.....	53

2.2.1	Développement de la première habileté : la perception spatiale	53
2.2.2	Développement de la deuxième habileté : la visualisation spatiale.....	54
2.2.3	Développement de la troisième habileté : les connaissances spatiales.....	60
2.3	Les représentations des objets dans l'espace.....	60
2.3.1	Dessin en perspective.....	64
2.3.2	Les projections orthogonales dans l'enseignement.....	69
2.4	Le concept de volume et des formules de volumes relatifs aux solides usuels.....	71
2.4.1	La position de l'équipe de Vergnaud (1983).....	71
2.4.2	La position de Janvier (1992, 1994, 1997) et de Tanguay (2010).....	73
2.4.3	La position de Tanguay (2009, 2010).....	77
2.5	Assises théoriques et recension des écrits.....	79
2.5.1	Le conflit cognitif« vu-su » dans les représentations des objets 3D.....	79
CHAPITRE III		
MÉTHODOLOGIE		89
3.1	Type de recherche dans le cadre de notre étude.....	89
3.2	Démarche d'une recherche qualitative/interprétative.....	90
3.2.1	La collecte de données.....	90
	a) Caractéristiques des élèves.....	91
	b) Contexte de recrutement des participants.....	92
	c) Mode de collecte de donnée: des tâches à proposer aux élèves.....	92
3.3	L'instrument de cueillette de données : les trois tâches de résolution de problème.....	93
3.3.1	Élaboration des tâches finales.....	93
3.3.2	Description des trois tâches choisies.....	94

a)	Tâche 1 : du chocolat Toblerone !.....	94
b)	Tâche 2 : pauvre Octaèdre !.....	97
c)	Tâche 3 : la tour décomposable.....	99
3.4	Analyse <i>a priori</i> des tâches de résolution de problème.....	100
3.4.1	Analyse <i>a priori</i> de la tâche 1: du chocolat Toblerone !.....	100
3.4.2	Analyse <i>a priori</i> de la tâche 2 : pauvre Octaèdre !.....	112
3.4.3	Analyse <i>a priori</i> de la tâche 3 : la tour décomposable.....	136
CHAPITRE IV		
RÉSULTATS ET ANALYSE.....		143
4.1	Présentation des résultats de recherche.....	144
4.1.1	Perspective retenue : le modèle du conflit cognitif « vu/su » de Parzys (1988).....	144
4.2	Grilles d'analyse des tâches.....	145
4.2.1	Première grille d'analyse : visualisation externe.....	145
4.2.2	Deuxième grille d'analyse : visualisation interne.....	146
4.2.3	Troisième grille d'analyse : le conflit cognitif « vu/su ».....	146
4.2.4	Quatrième grille d'analyse.....	150
4.3	Analyse des trois tâches de résolution de problème.....	151
4.3.1	Analyse de la tâche 1 : du chocolat Toblerone !.....	154
Question a.....		154
Question b.....		156
Question c.....		169
Question d.....		178
Question e.....		187

4.3.2	Analyse de la tâche 2 : pauvre Octaèdre !.....	194
	Question a.....	198
	Question b.....	201
	Question c.....	204
	Question d.....	220
	Question e.....	227
4.3.3	Analyse de la tâche 3 : la tour décomposable.....	235
	Question a.....	237
	Question b.....	254
CHAPITRE V		
	DISCUSSION DES RÉSULTATS	265
5.1	Validité des résultats.....	265
5.1.1	Réponses aux questions de recherche.....	265
	a) Discussion sur la tâche 1 : du chocolat Toblerone !.....	265
	b) Discussion sur la tâche 2 : pauvre Octaèdre !.....	271
	c) Discussion sur la tâche 3 : la tour décomposable.....	280
5.2	Limites de l'étude.....	282
5.2.1	La collecte de données.....	282
5.2.2	L'absence de certaines données liée à la durée de passation des tâches.....	283
5.2.3	L'analyse des données selon le modèle du conflit cognitif « vu/su ».....	284
CONCLUSION		287
6.1	Retour sur les questions de recherche	287
6.1.1	Des réponses à la première question de recherche	287
	i) Premier apport de notre étude.....	288

ii) Deuxième apport de notre étude.....	289
6.1.2 Des réponses à la deuxième et à la troisième question de recherche.....	291
i) Troisième apport de notre étude.....	292
ii) Quatrième apport de notre étude.....	292
iii) Cinquième apport de notre étude.....	294
iv) Sixième apport de notre étude.....	294
6.2 Les implications de cette recherche.....	295
6.2.1 Première recommandation.....	295
6.2.2 Deuxième recommandation.....	296
6.3 Piste pour une recherche ultérieure.....	297
BIBLIOGRAPHIE	299

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1	Visualisation directe d'une pyramide droite à base hexagonale.....7
1.2	Dessiner un objet 3D en 2D à la suite de sa visualisation directe.....8
1.3	Apothème de la base9
1.4	Un solide décomposable10
1.5	Représentation 2D d'un triangle rectangle à l'intérieur de la pyramide.....11
1.6	Dessin 2D pour un problème qui n'est donné qu'en mots.....13
1.7	La représentation en 2D d'un triangle rectangle dans un cône.....13
1.8	Squelette 2D d'une pyramide droite à base hexagonale.....19
1.9	Squelette 2D d'une boule.....20
1.10	Relever la présence de triangles rectangles dans un solide.....23
1.11	Un développement plan possible (patron) de la pyramide.....24
1.12	Projections orthogonales de l'exemple 126
1.13	Solide décomposable.....28
2.1	Un cube impossible.....59

2.2	Le cône visuel dans un dessin en perspective.....	65
2.3	Décoder un dessin 2D.....	66
2.4	Solide décomposable représenté en perspective à 1 point de fuite.....	67
2.5	Perspective à 2 points de fuite.....	68
2.6	Projection orthogonale d'un objet 3D sur un plan.....	69
2.7	Expérimentation de Janvier.....	74
2.8	Relations entre une figure et ses modes de représentation (Parzysz, 1988).....	81
2.9	Dessins 1A et 1B (images reprises de Parzysz, 1988).....	83
2.10	Coexistence du <i>vu</i> et du <i>su</i>	84
2.11	Deux représentations d'un tétraèdre (Parzysz, 1988, p. 90).....	85
2.12	Le conflit <i>vu-su</i> (notre adaptation).....	86
3.1	Barre de chocolat Toblerone.....	95
3.2	Structures emboîtables de type <i>Polydrons Frameworks</i>	96
3.3	Grille d'analyse <i>a priori</i> des 3 tâches.....	101
3.4	Développement d'un prisme.....	103
3.5	Solide final obtenu par assemblage (juxtaposition), en perspective cavalière.....	103
3.6a	Assemblage ou juxtaposition des 3 prismes droits réguliers à base triangulaire en perspective cavalière.....	104
3.6b	Juxtaposition « bout à bout » selon les bases triangulaires.....	104

3.7	Représentation des 3 barres Toblerone (nouveau solide) en perspective à 1 point de fuite.....	105
3.8	Représentation des 3 barres Toblerone (nouveau solide) en perspective cavalière.....	108
3.9	Un développement plan (patron) possible du nouveau solide.....	109
3.10	Représentation en perspective cavalière du prisme droit régulier à base hexagonale.....	112
3.11	Découpage selon les points ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX.....	116
3.12a	Un premier développement plan possible de l'octaèdre tronqué.....	121
3.12b	Un deuxième développement plan possible de l'octaèdre tronqué.....	121
3.13	Visualisation interne des faces cachées (carrés et hexagones) de l'octaèdre tronqué.....	123
3.14	Représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué.....	127
3.15	Représentation en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué.....	128
3.16	Partie supérieure de l'octaèdre (pyramide droite à base carrée).....	132
3.17	Calcul de la mesure d'un des côtés de la petite pyramide.....	133
3.18	Agrandissement d'une des « petites » pyramides à base carrée.....	133
3.19	Représentation en perspective cavalière de la tour décomposable.....	140
3.20	Projections orthogonales (vues de dessus) des 4 solides de la tour.....	141
4.1	Grille d'analyse : la visualisation directe d'un objet 3D.....	145
4.2	Grille d'analyse : la visualisation mentale d'un objet 3D.....	146

4.3	Quatrième grille d'analyse : difficultés se manifestant dans l'application des formules de volume.....	150
4.4	Assemblage des 3 barres par juxtaposition.....	155
4.5	Assemblage des 3 barres de chocolat à plat sur chaque base en perspective cavalière.....	155
4.6	Juxtaposition « bout à bout » selon les bases triangulaires.....	155
4.7	Représentations du solide.....	156
4.8	Parallélisme – perspective cavalière (copie #11).....	159
4.9	Règles, parallélisme et angles – perspective cavalière (copie #17).....	161
4.10	Difficulté des règles de la perspective cavalière (copie #19).....	162
4.11	Difficultés des règles de la perspective à 1 point de fuite (copie #13).....	164
4.12	Règles parallélisme et fuyantes, perspective à 1 point de fuite.....	166
4.13	Conflit cognitif « vu/su » (dimension des faces rectangulaires) – copie #5.....	167
4.14	Un développement plan du prisme droit à base trapézoïdale (copie #16).....	170
4.15	Autre développement plan du prisme droit à base trapézoïdale – copie #24.....	171
4.16	Présence du conflit « vu/su » dans un développement plan – copie #25.....	173
4.17	Présence du conflit « vu/su » dans un développement plan – copie #31.....	174
4.18	Confusion dans les types de représentation 2D (copies #9 et 12).....	175
4.19	Difficulté de visualisation interne (copies #13, 19, 29 et 30).....	177

4.20	Production d'élève appliquant correctement la formule de volume d'un solide (copie #18).....	179
4.21	Confusion hauteur de la base avec la hauteur du solide (copie #15).....	180
4.22	Confusion hauteur de la base d'un prisme avec la hauteur du solide.....	181
4.23	De quelle hauteur s'agit-il ?.....	182
4.24	Confusion de la hauteur de la base du solide avec sa hauteur.....	183
4.25	Repérer la « bonne » mesure d'un côté d'une base d'un solide décomposable (copie #19).....	184
4.26	À quelle classe de solides s'applique la formule de volume ? (copie #6).....	186
4.27	Production écrite de la <i>question e</i> – tâche 1 (copie #6).....	189
4.28	Perspective cavalière déficiente dans une production écrite – <i>question e</i>	191
4.29	Conflit cognitif « vu/su » apparaissant dans la perspective cavalière.....	192
4.30	Visualisation externe des faces de l'octaèdre tronqué.....	199
4.31	Productions écrites – développement plan de l'octaèdre tronqué.....	204
4.32	Production écrite (copie #6).....	206
4.33	Production écrite (copie #7).....	208
4.34	Production écrite (copie #27).....	210
4.35	Développement plan de l'octaèdre tronqué (copie #18).....	211
4.36	Développement plan erroné de l'octaèdre tronqué (copies #24).....	213
4.37	Développement plan erroné de l'octaèdre tronqué (copie #12, p. 1).....	215

4.38	Production écrite (copie #11).....	217
4.39	Confusion dans le type de représentation (copie #20, p.1).....	219
4.40	Représentations en perspective cavalière acceptables (copies #15 et 25).....	221
4.41	Éléments partiellement acceptables d'une représentation en perspective cavalière d'un octaèdre tronqué (copie #28).....	222
4.42	Représentation en perspective à 1 point de fuite (copies #18 et 25).....	226
4.43	Productions écrites de la <i>question e</i> tâche 2 (copies #1 et 2).....	228
4.44	Réponses obtenues à la <i>question e</i> – tâche 2 (copie #9).....	229
4.45	Réponse obtenue à la <i>question e</i> (copie #12).....	231
4.46	Réponse obtenue à la <i>question e</i> (copie #14).....	233
4.47	Réponses adéquates à la <i>question a</i> – tâche 3.....	237
4.48	Production écrite contenant une erreur mineure (copie #11).....	239
4.49	Réponses insuffisamment articulées (copie #29).....	240
4.50	Confusion formule de volume d'un cylindre et formule d'aire d'un disque.....	242
4.51	Réponses erronées <i>question a</i> –tâche 3 (copie #19).....	244
4.52	Production écrite (copie #25 p. 1-2).....	245
4.53	Vues de dessus des 4 solides de la tour décomposable.....	248
4.54	Erreur due au contrat didactique.....	249
4.55	Production écrite (copie #23, p. 1-2).....	251
4.56	Représentation en perspective cavalière (copie #21, p. 2).....	256

4.57	Erreur de représentation en perspective cavalière (copie #11, p.2).....	257
4.58	Représentation en perspective cavalière de la tour acceptable sauf pour la hauteur du cylindre (copie #20).....	259
4.59	Représentations en perspective cavalière (copies #8 et 14).....	260
4.60	Confusion dans les types de représentations (copies #13 et 15).....	261
4.61	Productions écrites (copies #17 et 24).....	263
5.1	Visualisation spatiale et repérage de triangles rectangles.....	278
5.2	Décodage d'une information clé : « petits traits » signifiant « isométrie ».....	281

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
1.1 Recension des locutions clés en géométrie de l'espace (MELS, 2007).....	31
1.2 Sens spatial et figures géométrique.....	34
2.1 Tableau récapitulatif des concepts clés.....	70
4.1 Grille d'analyse des tâches : conflit cognitif « vu/su »	148
4.2 Types de difficultés décrits par la recherche et relatives à la tâche 1.....	151
4.3 Types de difficultés décrits par la recherche et relatives à la tâche 2.....	194
4.4 Types de difficultés décrits par la recherche et relatives à la tâche 3.....	235
4.5 Comparaison entre une démarche appropriée et celle de la copie #16.....	243

RÉSUMÉ

Le rôle de la perception spatiale, de la visualisation et des connaissances spatiales dans la compréhension des formules de volume constitue un thème de recherche qui a peu ou pas été spécifiquement étudié par la communauté scientifique. D'une part, des chercheurs ont réalisé des recherches et des expérimentations sur les connaissances spatiales impliquant la visualisation (Presmeg, 1985, 1986a, 1986b, 1991, 1992, 2006 ; Bishop, 1983, 1988 ; Boublib-Ekimova, 2010), ou les représentations mentales (images mentales) d'objets géométriques (Parzysz, 1991 ; Berthelot et Salin, 1992 ; Janvier, 1992) ; d'autre part, d'autres chercheurs ont étudié le concept de volume ainsi que les formules de volume des solides usuels du point de vue de l'enseignement, et ont même proposé des séquences d'enseignement (Janvier, 1992, 1994, 1997), ou des démarches cherchant à réduire les difficultés qu'éprouvent les élèves face au concept de volume (Tanguay, 2010). Mais le lien entre ces deux domaines de l'enseignement et de l'apprentissage de la géométrie spatiale n'a pas été spécifiquement abordé.

En conséquence, le rôle des connaissances spatiales dans la compréhension du concept de volume relativement aux solides usuels est souvent négligé dans l'enseignement secondaire. Des études antérieures (Clements et Battista, 1992 ; Marchand, 2006 ; Janvier, 1992, 1994, 1997 ; Pallascio, Papillon et Dion, 1985, 1986, 1990 ; Pallascio, Talbot, Allaire et Mongeau, 1990 ; Gutiérrez, 1992 ; Parzysz, 1988, 1989, 1991 ; Anwandter-Cuellar, 2013) soulignent les difficultés qu'éprouvent les élèves et même les enseignants, lors d'activités qui font appel aux connaissances spatiales, par exemple dans le calcul de volumes.

L'objectif de notre recherche est de montrer le rôle important des connaissances spatiales, et leurs interactions avec la visualisation et la perception spatiales lorsqu'elles se rapportent aux modes et techniques de représentation plane (sur papier) des solides 3D, pour traiter adéquatement les formules de volume et ce, à travers des tâches de résolution de problème en géométrie spatiale.

Notre recherche montre que la perception spatiale, les connaissances spatiales ainsi que la visualisation constituent trois habiletés distinctes qui se développent de manière interdépendante, s'appuyant l'une sur l'autre, lors de tâches de résolution de problème axées sur le volume des solides. De plus, nous faisons l'hypothèse que la capacité à comprendre et à réaliser des dessins en perspective (cavalière ou à 1 point de fuite) constitue alors un atout majeur pour l'élève.

Dans les représentations des objets géométriques 3D usuels (polyèdres et corps ronds), il y a présence chez l'élève du conflit cognitif « vu/su » (Parzysz, 1988), le *vu* relevant de la

perception spatiale et le *su* des connaissances spatiales. Ce modèle de Parzys a été utilisé comme cadre conceptuel pour notre recherche.

La méthodologie employée dans notre étude est de nature qualitative, s'inscrivant dans une épistémologie interprétative. La cueillette des données s'est effectuée par l'entremise de matériel écrit, soit les productions écrites d'un groupe de trente-trois élèves suivant le cours de mathématiques 063-306 dans une école secondaire publique de l'Outaouais. L'expérimentation a consisté à administrer trois tâches de résolution de problème d'une durée de 75 minutes chacune, et faisant intervenir deux aspects : un 1^{er} aspect concernait la maîtrise des connaissances spatiales et un second aspect avait trait à l'application des formules de volumes des solides décomposables. Les productions écrites des élèves ont été examinées avec des grilles d'analyse : visualisation externe, visualisation interne, conflit cognitif « vu/su » et grille des difficultés face au concept de volume. Les résultats des analyses ont permis de donner des éléments de réponse à nos trois questions de recherche.

En conséquence, notre étude apporte des éléments qui éclairent les rôles que peuvent jouer la visualisation, la perception spatiale et les connaissances spatiales dans la compréhension que se construisent les élèves des formules de volumes et dans leur travail de mise en œuvre de cette compréhension. Finalement, notre étude montre que les rôles de la visualisation, de la perception spatiale et des connaissances spatiales demeurent complexes pour une « bonne » application des formules de volumes dans des tâches spécifiques de résolution de problème.

Mots clés : visualisation, perception spatiale, connaissances spatiales, formules de volume, représentations des objets 3D, conflit cognitif « vu/su ».

INTRODUCTION

Notre recherche s'intéresse à une question qui est au centre des préoccupations de plusieurs enseignants de mathématiques du secondaire : le problème de l'enseignement de la perception spatiale, de la visualisation et des connaissances spatiales et leur rôle dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, spécifiquement quant au traitement adéquat des formules de volume des solides usuels.

Dans le premier chapitre, nous situons le problème de l'enseignement de la géométrie de l'espace du point de vue d'un enseignant de mathématique au secondaire, en exposant quatre difficultés majeures vécues par les élèves dans des tâches de résolution de problèmes axées sur le calcul de volume amenant l'identification de trois habiletés dont l'élève a besoin pour résoudre, soit la perception spatiale, la visualisation spatiale (externe et interne) ainsi que les connaissances spatiales. Ensuite, en nous basant sur les travaux de Janvier (1992, 1994, 1997) et Tanguay (2010) nous montrons que l'étude du volume doit être conduite concomitamment à un développement de la visualisation spatiale. Nous présentons aussi dans ce chapitre notre problème de recherche et les questions de recherche.

Dans le deuxième chapitre, nous effectuons une analyse des concepts-clés en jeu : image mentale, différences entre figure, dessin et représentation, perception et visualisation spatiale, connaissances spatiales, représentations des objets de l'espace. Nous présentons également une revue de littérature ayant trait à notre thème de recherche.

Dans la représentation des objets géométriques 3D tels que les solides usuels (polyèdres et corps ronds), il y a présence chez l'élève du conflit cognitif *vu-su* (Parzysz, 1988). Le *vu* relève de la perception spatiale, c'est-à-dire ce que nous voyons de l'objet 3D (solide). Le *su* est ce que nous savons de l'objet géométrique (solide) à travers, entre autres, les propriétés de ses composantes de dimensions inférieures : parallélisme, perpendicularité, incidence des

arêtes, des sommets, des faces, mesures des angles dièdres (entre les faces) ou des angles plans entre les arêtes, etc. Le conflit cognitif s'opère ainsi : on ne peut dessiner des figures de l'espace que si on *sait* d'avance comment en sont disposés les divers constituants. Les représentations planes ne facilitent pas nécessairement ce repérage d'éléments et peuvent être source d'illusions, peuvent donner lieu à des interprétations (des décodages) erronées. L'élève doit prendre conscience de la nécessaire perte d'informations dans la représentation plane d'un objet tridimensionnel, et l'enseignement doit pouvoir lui permettre d'identifier et comprendre quelle information est perdue.

Dans le chapitre trois, nous présentons notre approche méthodologique qui est de nature qualitative s'inscrivant dans une épistémologie interprétative. Pour arriver à répondre à nos questions de recherche, nous avons élaboré 3 tâches de résolution de problèmes axées sur la perception spatiale, la visualisation spatiale et le calcul de volume. Dans ce chapitre, nous présentons aussi l'analyse *a priori* des 3 tâches contenant la solution avec l'identification des connaissances spatiales nécessaires ainsi que l'anticipation des difficultés et des erreurs.

Dans le quatrième chapitre, nous présentons nos grilles d'analyse utilisée pour traiter nos données ainsi que nos résultats de recherche, en utilisant la perspective du modèle du conflit cognitif « vu/su » (Parzysz, 1988).

Dans le cinquième chapitre, nous discutons des résultats à la suite de notre analyse, à travers laquelle nous avons obtenu des éléments de réponse à nos questions de recherche. Notamment nous montrons comment la perception spatiale, la visualisation spatiale et les connaissances spatiales interviennent dans des tâches de résolution de problème pour calculer le volume de solides. Nous comparons aussi les résultats obtenus avec d'autres études pour faire ressortir comment notre recherche bonifie le corpus de recherche actuel.

Dans la conclusion, nous abordons à nouveau nos questions de recherche en faisant ressortir des éléments importants qui permettent de voir ce que notre étude apporte au domaine de recherche. Nous ouvrons par la suite sur des retombées (recommandations) sur l'enseignement de la géométrie spatiale au secondaire pour terminer sur une piste possible pour des recherches ultérieures.

Mentionnons pour finir que ce mémoire est rédigé au « je » dans le chapitre 1, « Problématique », parce que l'auteur y fait part de ses points de vue personnels sur le problème, des questions que ce problème a soulevées à travers sa propre expérience d'enseignement et des premières réflexions et recherches (entres autres bibliographiques) que ces questions ont déclenchées chez lui. Pour le reste, le mémoire est rédigé au « nous » parce que son auteur a voulu ainsi rendre compte du travail de collaboration qui a été le sien avec son directeur de recherche, et avec les autres étudiants et professeurs avec lesquels il a été amené à discuter et réfléchir tout au long de cette entreprise.

CHAPITRE I

PROBLÉMATIQUE

1.1 La situation globale du problème de recherche

Les connaissances spatiales constituent des atouts pour la vie. Tout comme les connaissances du langage que l'être humain a développées à travers la lecture et l'écriture, les connaissances spatiales doivent être reconnues comme étant indispensables au développement de l'être humain. Nous vivons et interagissons constamment dans un espace tridimensionnel, que ce soit pour voir ou percevoir des objets, se déplacer, évaluer des distances, manipuler des objets, construire des objets tridimensionnels, etc.

Il est important de mentionner qu'il existe différents niveaux de connaissances spatiales ; certains, par exemple, qui sont essentiels à la vie quotidienne et d'autres qui sont exigés à différents degrés de spécialisation pour des métiers ou professions. Par exemple, un niveau élevé de maîtrise des connaissances spatiales est nécessaire en architecture, pour piloter un avion, pour opérer des excavatrices, pour réaliser des sculptures, il est nécessaire à un chirurgien qui effectue des opérations chirurgicales, à un chorégraphe qui organise des danses complexes, à un ingénieur manipulant un logiciel de géométrie servant à la réalisation de plans de construction, etc. Qui plus est, les individus en général qui doivent comprendre, utiliser et apprécier les différentes créations dans ces disciplines spécialisées doivent à leur tour développer une meilleure compréhension des objets spatiaux.

Je crois qu'une bonne formation aux connaissances spatiales peut permettre une condition humaine mieux adaptée à notre monde contemporain. Tout comme Pallascio, Allaire et

Mongeau (1992), je pense que les habiletés spatiales jouent un rôle essentiel dans différentes habiletés mathématiques :

Le travail de synthèse effectué par Bishop l'a amené à intuitionner que les concepts mathématiques pourraient être développés, non seulement par l'enseignement des mathématiques, mais aussi en développant certaines habiletés fondamentales, dont les habiletés spatiales. (Op. cit., p. 73)

Dans ma recherche à la maîtrise en mathématiques, je m'intéresse à la compréhension du volume dans l'enseignement de la géométrie au secondaire, et cela m'amène à poser une première (version de ma) question de recherche, que je vais reprendre pour la préciser à la fin du chapitre 2 : qu'en est-il du rôle des connaissances spatiales dans la compréhension du volume chez les élèves ?

1.2 Le problème de l'enseignement de la géométrie de l'espace, vécu comme enseignant

Enseignant de mathématiques au secondaire depuis 1997, je me suis souvent interrogé sur le sens spatial et les connaissances spatiales, plus particulièrement sur le rôle que pouvaient jouer les connaissances spatiales développées par les élèves en mathématiques de 3^e et 5^e secondaire, en lien avec leur compréhension du volume ainsi qu'avec l'application des formules de volume.

Dans mon vécu d'enseignant de mathématiques au secondaire, j'ai constaté la difficulté des élèves à identifier les éléments qui interviennent dans les formules de volume des solides (hauteur, apothème, relation de Pythagore dans l'espace, etc.) et j'ai eu l'intuition que cela est lié à la difficulté à visualiser, à se faire une image mentale, à décoder la représentation d'un objet 3D lorsqu'elle est donnée et à s'en faire une lorsque le problème n'est donné qu'en mots (discursivement).

Voici quatre exemples tirés de ma pratique enseignante, où il y a présence de cette difficulté vécue par les élèves, difficulté globale que je tenterai de préciser ensuite en décrivant quatre difficultés plus ciblées.

1.2.1 Difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à déterminer une mesure manquante

Voici un premier exemple de situation problème où l'élève visualise directement l'objet 3D qu'il tient dans ses mains. Dans ce problème, nous avons une pyramide droite régulière à base hexagonale dont le périmètre de la base est égal à 24 cm et où la mesure de l'arête PA vaut 10 cm. Il est demandé de calculer le volume du solide. Dans la figure 1.1, nous avons cinq points de vue différents d'une pyramide droite à base hexagonale. Ces points de vue aident à visualiser des informations clés sur la nature des constituants de ce solide (forme des faces, nombre de sommets et d'arêtes) et leur organisation dans l'espace (relation d'incidence, de perpendicularité et de parallélisme, etc.) Il est à noter que dans la figure 1.1, le solide est fait de matériau de plastique transparent, ce qui facilite la visualisation.

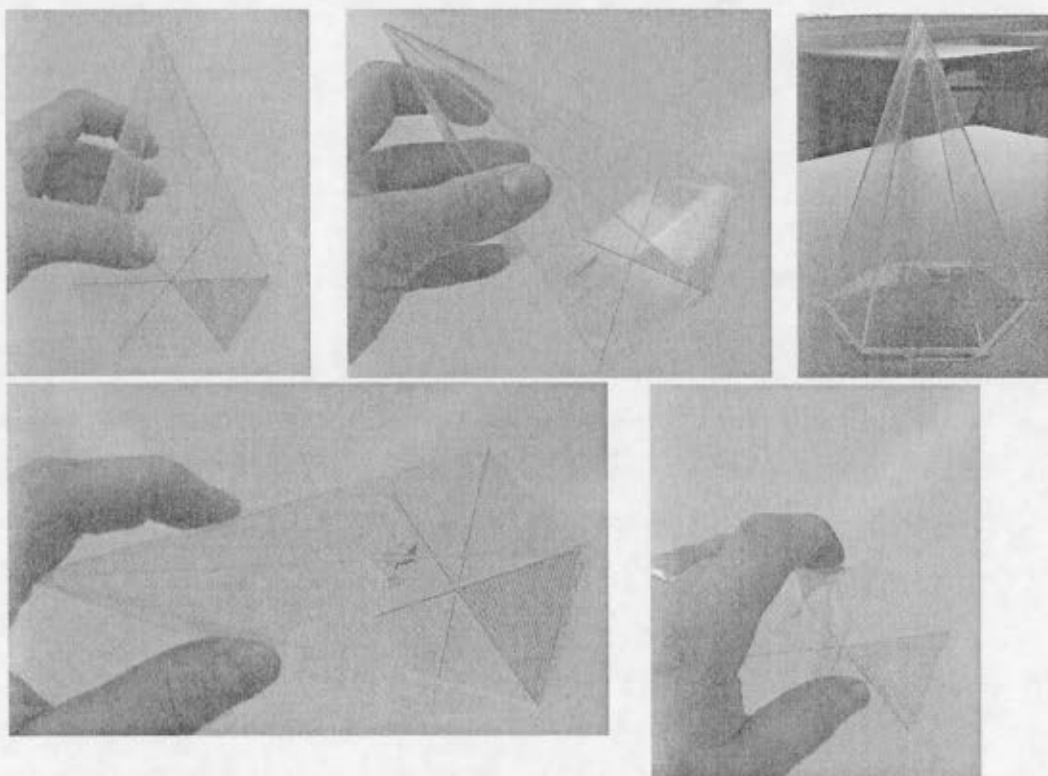


Figure 1.1 Visualisation directe d'une pyramide droite à base hexagonale

Il sera alors utile d'une part de visualiser le « squelette » de l'objet 3D, c'est-à-dire ses arêtes et leur organisation, et d'autre part de le dessiner en 2D afin d'identifier les

constituants pour rechercher les mesures manquantes dont on pourrait avoir besoin pour le calcul du volume.

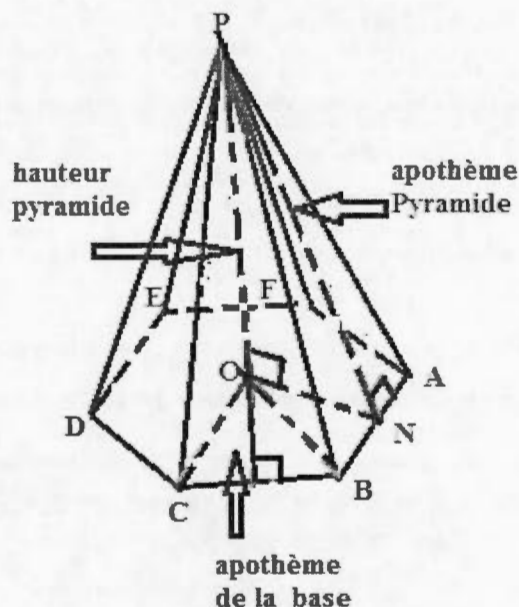


Figure 1.2 Dessiner un objet 3D en 2D à la suite de sa visualisation directe

Dans un premier temps, il faut visualiser directement les constituants de l'objet 3D (voir figure 1.1). Ensuite, il faut trouver de quelles mesures on aura besoin pour mener tous les calculs à bien, il faut déterminer ces mesures manquantes, soit la mesure du côté de la base de l'hexagone, la mesure de l'apothème de la base ainsi que la mesure de l'apothème de la pyramide. Une difficulté chez les élèves est de repérer les triangles rectangles, d'abord dans l'objet 3D, puis dans la représentation 2D de l'objet 3D, afin de déterminer les mesures manquantes en appliquant correctement la relation de Pythagore dans l'espace. Le dessin peut être source de confusion chez les élèves, c'est-à-dire que dans le repérage des triangles rectangles dessinés à la figure 1.2, les angles droits ne sont pas toujours « perçus » comme étant droits par certains élèves, ils doivent faire un effort pour bien les visualiser. Pour plusieurs élèves, le fait que le triangle PAN soit dessiné de manière « oblique » rend difficile le repérage de l'angle droit (hauteur abaissée de P au point N).

J'affirme que le dessin 2D, loin d'aider au repérage des éléments que je viens de mentionner, peut être source d'illusions, et donc d'erreurs chez les élèves. Par ailleurs, la profusion de « hauteurs » et d'apothèmes (qui sont le plus souvent elles aussi des hauteurs) pour plusieurs objets différents est source de confusion pour les élèves.

Voici une démarche pour calculer les mesures manquantes :

– valeur de c , la mesure du côté de la base (hexagonale) – voir figure 1.3

$$\text{périmètre de la base hexagonale} = 24 \text{ cm} = 6 \times c \Rightarrow c = 4 \text{ cm}$$

– valeur de a , la mesure de l'apothème de la base

$$a = \sqrt{4^2 - 2^2} \approx 3,46 \text{ cm}$$

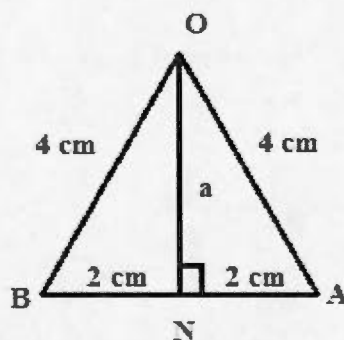


Figure 1.3 Apothème de la base

– PN , l'apothème de la pyramide

– après avoir repéré le triangle rectangle (figure 1.2) composé des cathètes PN et AN , ainsi que de l'hypoténuse PA , calculer la mesure de l'apothème de la pyramide :

$$PN^2 + AN^2 = PA^2$$

$$PN^2 + 2^2 = 10^2 \Rightarrow PN = \text{apothème pyramide} \approx 9,80 \text{ cm}$$

– calculer la hauteur h de la pyramide :

après avoir repéré le triangle rectangle PNO dans l'espace et ses constituants (cathète ON qui est aussi l'apothème de la base, cathète PO , qui est la hauteur de la pyramide et l'hypoténuse PN , qui est l'apothème de la pyramide), calculer la hauteur comme suit :

$$PO^2 + ON^2 = PN^2 \Rightarrow PO = \text{hauteur pyramide} = \sqrt{9,80^2 - 3,46^2} \approx 9,17 \text{ cm}$$

– calcul du volume de la pyramide :

$$\text{volume pyramide} = \frac{\frac{c \times n \times a}{2} \times h}{3} \approx \frac{\frac{4 \times 6 \times 3,46}{2} \times 9,17}{3} \approx 126,9 \text{ cm}^3.$$

1.2.2 Difficulté à décoder la représentation d'un objet 3D lorsqu'elle est donnée sur papier

Voici un deuxième exemple où il est demandé à l'élève de calculer le volume total d'un solide décomposable formé d'un prisme droit à base carrée surmonté d'une pyramide droite :

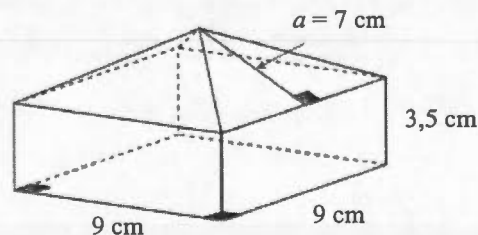


Figure 1.4 Un solide décomposable

Dans cet exemple, l'élève doit bien décoder la représentation du solide décomposable 3D qui lui est donnée, c'est-à-dire qu'il doit bien identifier la hauteur de la pyramide ainsi que son apothème. Pour ce faire, il doit reconnaître précisément où cette hauteur et cet apothème sont situés spatialement, dans un triangle rectangle qui est situé « à l'intérieur même » de la pyramide (c'est donc la relation de Pythagore qui s'applique dans l'espace) et s'en faire une

représentation mentale ; ensuite, représenter au besoin le triangle rectangle dans l'espace, à l'aide d'un dessin en deux dimensions comme celui-ci par exemple :

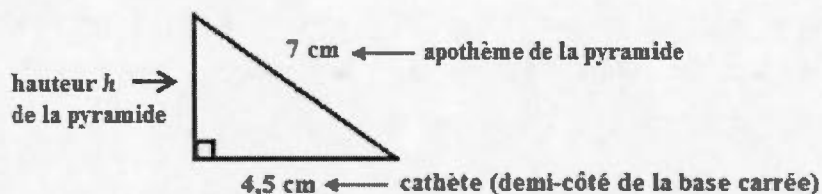


Figure 1.5 Représentation 2D d'un triangle rectangle à l'intérieur de la pyramide

Ensuite, appliquer la relation de Pythagore dans l'espace comme suit :

$$h^2 = 7^2 - 4,5^2 \Rightarrow h \approx 5,36\text{cm}.$$

Toutefois, certains élèves éprouvent toujours des difficultés à « voir » (perception spatiale) cette hauteur et mon expérimentation en classe dans le cadre de la présente recherche le confirmera. Si ces élèves sont incapables de bien percevoir et de bien identifier cette hauteur, ils peuvent quand même poursuivre leur démarche de raisonnement algébrique pour déterminer la valeur manquante, mais elle s'exécutera fort probablement de manière erronée. Le problème de la confusion entre les différentes hauteurs (des objets bi- et tri-dimensionnels en cause) se manifestera ici aussi, vraisemblablement.

1.2.3 Difficulté à visualiser et à se construire une image mentale

Dans une situation problème, l'on demande à l'élève de calculer le volume d'une pyramide régulière droite à base hexagonale. L'enseignant sait que l'élève aura besoin de se représenter par des images mentales les éléments suivants pour bien faire son calcul de volume : mesure du côté de la base du solide qui est un hexagone, mesure de l'apothème de l'hexagone, mesure de l'apothème de la pyramide, mesure de la hauteur de la pyramide. Or, plusieurs élèves à qui j'ai enseigné éprouvent de la difficulté à visualiser (en trois dimensions) où est située la hauteur du solide pour appliquer la relation de Pythagore, ils confondent l'apothème de la base du solide avec l'apothème de la pyramide, ils ne repèrent pas aisément le triangle rectangle dans l'espace situé à l'intérieur de la pyramide à base hexagonale (les deux cathètes étant l'apothème de l'hexagone et la hauteur de la pyramide;

l'hypoténuse étant la hauteur d'un des six triangles isocèles composant la face latérale de la pyramide).

En plus de se créer des images mentales, l'élève doit parfois dessiner l'objet 3D (la pyramide en question) en utilisant des techniques de représentation telles que la perspective cavalière ou les perspectives à 1 ou à 2 points de fuite.

Qui plus est, l'élève devra parfois utiliser sa capacité à comprendre et décoder les projections orthogonales, c'est-à-dire les vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière.

1.2.4 Difficulté à dessiner un objet 3D par une technique de représentation lorsque le problème n'est posé qu'en mots et qu'une mesure est manquante

Voici un quatrième exemple de situation problème où l'élève doit décoder les informations données en mots, dessiner en 2D cet objet 3D par une technique de représentation, puis finalement calculer la valeur de la mesure manquante.

« Une bouée a la forme d'un cône surmonté d'une demi-boule de même diamètre, de 8 cm. Détermine quelle est la hauteur du cône si le volume total de la bouée est de $\frac{320\pi}{3}$ cm³. De plus, tu dois illustrer sur un dessin 2D où est située la mesure manquante. »

Une première étape est le décodage des mots clés :

- une bouée est un objet physique servant à la navigation maritime et elle constitue un solide décomposable, formé d'un cône droit surmonté d'une demi-boule de même diamètre ;
- le volume du solide décomposable est un nombre irrationnel qui est exprimé exactement comme un multiple de π ;
- on cherche à déterminer la mesure de la hauteur du cône.

Une 2^e étape est la production d'un dessin 2D par une technique de représentation, par

exemple la perspective cavalière illustrée à la figure 1.6.

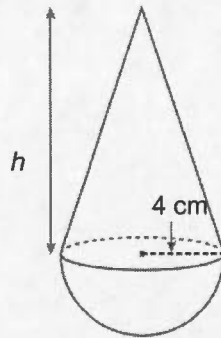


Figure 1.6 Dessin 2D pour un problème qui n'est donné qu'en mots

Une 3^e étape est la détermination de la valeur manquante qu'est la hauteur du cône.

Dans ce type de problème, il faut que l'élève se fasse une représentation mentale de la hauteur du cône en se servant correctement de la relation de Pythagore. Il peut y avoir présence d'une difficulté à identifier les éléments de la formule dans la représentation spatiale du solide (confusion hauteur-arête, arête-apothème ; difficulté à se faire une image mentale de la hauteur abaissée d'un point sur un plan) :

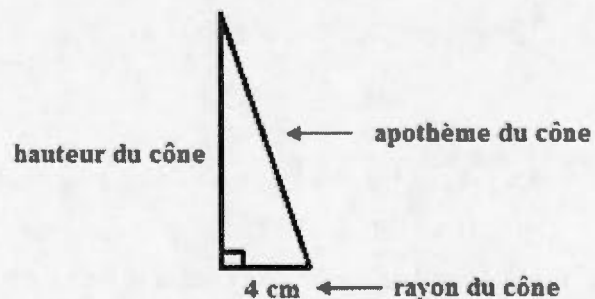


Figure 1.7 La représentation en 2D d'un triangle rectangle dans un cône

Ensuite, voici une démarche de résolution algébrique possible pour ce quatrième exemple, où j'ai conservé les deux membres de l'équation en appliquant la méthode de résolution algébrique dite « de la balance » :

Volume de la bouée = Volume du cône + Volume de la demi-boule

$$\frac{320\pi}{3} = \frac{(\pi r^2 \times h)}{3} + \frac{(4\pi r^3)/3}{2}$$

$$\frac{320\pi}{3} = \frac{(\pi \times 4^2 \times h)}{3} + \frac{(4\pi \times 4^3)/3}{2}$$

$$\frac{320\pi}{3} = \frac{(16\pi \times h)}{3} + \frac{(256\pi)/3}{2}$$

$$320\pi = 16\pi \times h + 128\pi$$

$$320 = 16h + 128 \Rightarrow h = \frac{320 - 128}{16} = 12 \text{ cm.}$$

Bref, j'ai constaté dans mon enseignement de la géométrie spatiale que plusieurs élèves éprouvent des difficultés d'apprentissage face au volume impliquant la visualisation spatiale, la perception spatiale¹, les connaissances spatiales ou une combinaison de ces trois éléments : que ce soit lors d'exercices d'applications de formules pour le calcul de solides décomposables, lors d'exercices d'application et de consolidation des connaissances spatiales telles que les projections orthogonales, les représentations de solides en perspective cavalière, en perspective à 1 ou à 2 points de fuite, ainsi que les développements plans de polyèdres, et aussi dans des tâches de résolution de problèmes axées sur le calcul de volume. Qui plus est, les taux de réussite aux examens de mes élèves face à ces mêmes éléments se révèlent faibles.

Plusieurs études ont montré que les habiletés spatiales sont positivement corrélées avec la réussite en mathématiques (Aiken, 1971 ; Battista, 1980 ; Fennema & Sherman, 1977). Toutefois, le rôle que peut détenir la pensée spatiale dans la performance en mathématiques chez les élèves n'a pas été suffisamment décrit selon Battista, Wheatley & Talsma (1982) :

Typically, it has correlated with mathematics achievement with about the same magnitude as verbal ability (Fennema & Behr, 1980). More recently, and perhaps guided by the thought that spatial ability is a factor that underlies

¹ Je discuterai plus loin de la différence que je fais entre *visualisation spatiale* et *perception spatiale*.

mathematical aptitude, researchers have attempted to discover the role that spatial ability plays in mathematics learning. This has been done in aptitude-treatment interaction studies hypothesizing that the effectiveness of certain instructional treatments in mathematics depends on students' spatial ability (Battista, 1981; Du Rapau & Carry, 1981; Eastman & Salhab, 1978; Adi & Behr, Note 1). It has also been done by studies that have attempted to improve the mathematical performance of students by training them on spatial tasks (Moses, 1977). But despite the considerable effort that has been spent investigating the relationship between spatial ability and mathematics achievement, the role that spatial thinking plays in mathematical performance has not been adequately described. It is still not known how important spatial ability is for learning various topics in mathematics, nor are the spatial components of mathematical thinking understood. (Battista, Wheatley & Talsma, 1982, p. 332)

J'en propose la traduction suivante :

Typiquement, elle [la pensée spatiale] a été corrélée à la réussite en mathématiques au même degré environ que la capacité verbale (Fennema et Behr, 1980). Plus récemment, et peut-être guidé par la pensée que la capacité spatiale est un facteur qui sous-tend l'aptitude en mathématiques, les chercheurs ont tenté de découvrir le rôle que la capacité spatiale joue dans l'apprentissage des mathématiques. Cela a été fait dans des études d'interaction aptitude-traitement sous l'hypothèse que l'efficacité de certains traitements en enseignement des mathématiques dépend de la capacité spatiale des élèves (Battista, 1981 ; Du Rapau & Carry, 1981 ; Eastman & Salhab, 1978 ; Adi et Behr[...]). Cela a également été fait dans des études qui visaient l'amélioration de la performance mathématique des élèves en les formant sur les tâches spatiales (Moses, 1977). Mais en dépit des efforts considérables déployés à étudier la relation entre la capacité spatiale et la réussite en mathématiques, le rôle que joue la pensée spatiale dans la performance mathématique n'a pas été adéquatement décrit. On ne sait pas encore jusqu'à quel point la capacité spatiale aide à l'apprentissage de divers sujets en mathématiques, et les composantes spatiales de la pensée mathématique ne sont pas encore bien comprises.

Ma recherche se propose donc de répondre au moins en partie à un besoin exprimé par la communauté des chercheurs dans le domaine de la géométrie tridimensionnelle, s'intéressant aux rôles des connaissances spatiales et à la question de savoir si celles-ci favorisent des apprentissages plus significatifs en mathématiques pour les élèves. Cependant, je vais investiguer et étudier spécifiquement le rôle que peuvent jouer les connaissances spatiales dans le raisonnement géométrique 3D des élèves, mais je ne

chercherai pas à répondre à ces questions pour les mathématiques qui seraient situées en dehors de la géométrie 3D.

Les chercheurs Clements & Sarama (2009) soulignent que les représentations spatiales d'objets 3D sont utiles au raisonnement spatial dans des tâches de résolution de problèmes. Par exemple, une de leurs études souligne que les représentations spatiales des solides par des élèves particulièrement performants en résolution de tâches liées au calcul de volume faisaient voir, souvent avec exactitude, les relations spatiales concernées par le problème (repérage et identification de triangles rectangles dans l'espace).

D'autres chercheurs, tels Pittalis & Christou (2010), considèrent que les représentations de figures 2D en perspective cavalière constituent le type le plus fréquent de mode de représentation utilisé pour représenter des objets 3D en mathématiques à l'école secondaire. Ces chercheurs exposent dans leur étude que les élèves éprouvent de grandes difficultés à dessiner des objets 3D selon telle technique de représentation (perspective cavalière, perspective à 1 point de fuite, vues de face, de droite, de dessus, de gauche, d'arrière et de dessous) ainsi qu'à représenter adéquatement des droites parallèles et des droites perpendiculaires dans l'espace.

Je pose comme hypothèse de travail que la maîtrise des habiletés de représentation spatiale d'un solide (objet 3D) constitue une condition nécessaire (mais pas nécessairement suffisante) à un traitement adéquat du volume dans des tâches de résolution de problème. Par exemple, si je veux une représentation visuelle ou graphique d'un solide afin d'en calculer le volume, je fais l'hypothèse qu'il faut se faire une image mentale correcte et à défaut de cela, qu'il faut pouvoir le dessiner sans distorsions majeures en deux dimensions, ou encore pouvoir le représenter à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique tel *GeoGebra*².

² *Geogebra* est un logiciel de géométrie dynamique intégrant toutes les fonctionnalités d'un tel logiciel : calcul formel, représentation graphique, tableur, fonctions, etc. De plus, *Geogebra* est un gratuitiel, c'est-à-dire un logiciel libre, sans frais pour l'utilisateur et qui bénéficie des apports de la communauté de recherche pour améliorer ses fonctions et sa convivialité. Néanmoins, je ne me pencherai pas dans la présente étude sur les apports possibles d'un tel logiciel, une question qui peut faire à elle seule l'objet d'une thèse (voir par ex. la thèse de Joris Mithalal, 2010).

À la suite du constat des difficultés des élèves à bien identifier les éléments intervenant dans les formules de volume, j'affirme que l'élève a besoin de développer des compétences (au sens d'habiletés, de savoir-faire) que nous allons regrouper en trois catégories : 1) la perception spatiale ; 2) la visualisation que nous allons répartir en deux sous-catégories, soit la visualisation externe (directe) d'un objet 3D et la visualisation interne, c'est-à-dire provenant d'un processus de création et de modifications d'images mentales ; 3) les connaissances spatiales.

1.3 Des habiletés à préciser

Je considère que ces trois habiletés sont essentielles à un travail adéquat sur le calcul de volumes, et je l'ai constaté dans les difficultés dont j'ai discuté antérieurement, ce constat s'appuyant largement sur mon expérience d'enseignant.

1.3.1 Première habileté : la perception spatiale

La *perception spatiale* désignera dans le présent travail la capacité sensitive, se réalisant par l'œil, à recueillir des informations sur la position d'objets dans l'espace, informations qui seront ensuite traitées par le cerveau. Elle se fait donc en général en présence de l'objet (qui est en vue : nous le voyons), mais nous pouvons aussi envisager qu'elle se fasse en présence d'une représentation 2D d'un objet 3D quand nous « ressentons perceptivement » le volume (la 3^e dimension) suggérée par la représentation. Ainsi, elle constitue une habileté se développant par l'expérience et exigeant un entraînement à travers des tâches spécifiques. Toutefois, parmi les trois habiletés, c'est la plus difficile à travailler directement et spécifiquement à partir des tâches, et cela pourrait expliquer pourquoi elle ne se retrouve pas dans les questions de recherche.

Par exemple, dans une tâche de géométrie spatiale où il est demandé de calculer le volume d'un solide décomposable, et où l'énoncé ne comporte pas de représentation 2D de l'objet 3D à l'étude, il sera difficile d'utiliser la perception spatiale puisqu'on ne peut « voir » directement l'objet physique ni une de ses représentations planes, sur lesquelles on pourrait

identifier des éléments de la représentation spatiale (hauteur du solide, apothème, mesure du côté de la base, etc.) dont on aurait besoin pour calculer le volume.

La perception spatiale, selon le sens que je donne à cette locution, est globale, purement perceptive, synchrétique, c'est-à-dire spontanée et indifférenciée, ne se rapportant qu'à la forme générale de l'objet.

De plus, il n'y a pas d'interprétation lors de la perception spatiale. Ainsi, pour ce qui est du décodage des représentations en perspectives (cavalière, à 1 point de fuite ou à 2 points de fuite) des objets 3D, il serait plus de l'ordre de la visualisation spatiale.

1.3.2 Deuxième habileté : la visualisation

a) Visualisation externe (directe)

Lorsque je parlerai de visualisation directe, cela concernera la capacité à visualiser un objet physique, c'est-à-dire à identifier ses constituants : formes (nature, nombre des constituants, mesures), squelette de l'objet, arêtes, faces, sommets, nature des angles (dièdre, droit). De plus, la visualisation directe permet aussi d'identifier les constituants d'une représentation 2D d'un objet 3D se manifestant par le décodage de ces constituants.

Contrairement à la perception spatiale, la visualisation est plus locale que globale, elle amorce un début d'analyse, c'est-à-dire qu'elle se concentre sur une ou des parties spécifiques d'un objet, dont la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) est ainsi amorcée : on cherche et repère les éléments structuraux de dimension 0, (les sommets), de dimension 1 (les arêtes), de dimension 2 (les faces) et de dimension 3 (le solide lui-même).

Je vais utiliser mon exemple de situation problème (voir exemple 1), où l'élève visualise directement une pyramide droite hexagonale qu'il tient dans ses mains. Cette habileté concerne d'une part la visualisation des formes de la pyramide droite hexagonale (voir figure 1.1) — un hexagone régulier et six triangles isocèles — et d'autre part, la visualisation du squelette 2D du polyèdre. Visualiser le squelette 2D d'un polyèdre que l'on

a devant soi signifie se créer des images mentales de la structure interne du polyèdre, c'est-à-dire voir comment sont organisés ses arêtes, ses sommets et ses faces. Dans une pyramide droite à base hexagonale, son squelette est composé de douze arêtes et sept sommets (voir figure 1.8) qui sont le support de sept faces.

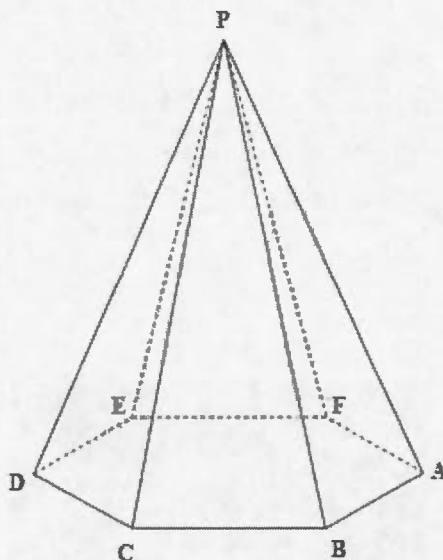


Figure 1.8 Squelette 2D d'une pyramide droite à base hexagonale

La visualisation directe permet d'identifier les constituants visibles de l'objet 3D tels que les formes des faces (hexagone, triangles), l'organisation des arêtes (incidence, orientation dans l'espace, longueur relative...), la base formée de six arêtes isométriques (hexagone régulier), les faces latérales formées de six triangles isocèles isométriques, l'apex de la pyramide et les six autres sommets.

Dans mon vécu d'enseignant, j'ai constaté que pour un élève ayant une difficulté à visualiser directement un objet 3D, il peut être facilitant de recourir à une autre habileté, celle de dessiner en 2D l'objet 3D avec une technique de représentation spécifique (perspective cavalière par exemple), afin de bien identifier sur papier les éléments constitutifs de l'objet 3D. Par exemple, le dessin 2D aide à repérer la présence de triangles rectangles dans la

pyramide. Ainsi, si la formule du volume de la pyramide est connue, il sera plus facile de déterminer les mesures manquantes (hauteur, arête, apothème de la base, apothème d'une pyramide, rayon, etc.)

Dans certains contextes ou problèmes plus spécifiques, il peut être utile de discuter de la visualisation du squelette 2D d'un corps rond tel qu'une boule. Je vais utiliser l'analogie géographique du globe terrestre pour expliquer ce que j'entends par « squelette d'une boule ». Les méridiens sont des cercles imaginaires tracés sur le globe terrestre reliant les pôles géographiques. Les parallèles sont aussi des cercles imaginaires parallèles à l'équateur. Analogiquement, le squelette d'une boule est formé par les méridiens et les parallèles, tels qu'illustrés à la figure 1.9.

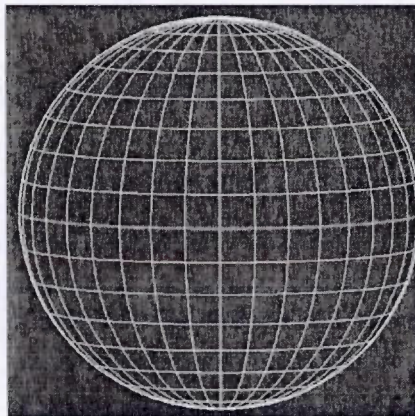


Figure 1.9 Squelette 2D d'une boule

b) La visualisation mentale (interne) provenant d'un processus de création d'images mentales

Sur la base des lectures que j'ai faites et qui seront discutées au chapitre 2, je subdivise cette habileté à visualiser mentalement un objet de l'espace en trois sous-habiletés, qui seront :

- i) la visualisation mentale des constituants d'un solide,

- ii) la capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D,
- iii) la capacité à visualiser les développements plans (patrons) et les projections orthogonales d'un objet 3D.

i) Visualisation mentale des constituants d'un solide

Je vais analyser la troisième difficulté dont j'ai discuté (voir exemple 3, section 1.2.3), soit celle de se construire une image mentale d'un objet 3D, tel qu'une pyramide régulière droite à base hexagonale, et de ses constituants : hauteur, apothème de la base, apothème de la pyramide, mesure d'un côté, repérer un triangle rectangle en 3D dans le solide, etc. Dans une tâche de résolution de problème liée au calcul de volume, l'élève a besoin de repérer ces constituants pour appliquer la formule de volume.

Il doit se créer des images mentales du solide et de ses constituants. Un premier constituant est la hauteur du solide. Ce qui complique la situation, c'est qu'elle n'est pas toujours apparente (évidente), et qu'elle peut être située « à l'intérieur » ou « à l'extérieur » du solide, comme dans le cas des pyramides et des cônes selon qu'ils sont droits ou obliques. Autrement dit, l'élève ne peut la voir facilement sans faire l'effort de se construire des images mentales.

Cela m'amène à discuter de la confusion entre les différentes hauteurs des différents objets 3D. Dans l'exemple (voir figure 1.1), il y a présence de trois hauteurs différentes : la hauteur de la pyramide droite (voir paragraphe précédent), l'apothème de la pyramide et l'apothème de l'hexagone constituant la base de la pyramide.

L'apothème d'une pyramide droite régulière est la hauteur (ou sa mesure, par abus de langage) abaissée perpendiculairement de l'apex sur un des côtés du polygone formant la base de cette pyramide. Mais il s'agit en fait de la hauteur des triangles isocèles formant les faces latérales de la pyramide. L'élève doit non seulement se créer une image mentale de cet

apothème, mais il doit aussi se créer d'autres images mentales, comme celles des côtés, en tant que triangles isocèles composant les faces latérales de la même pyramide.

Dans le cas de l'apothème de la base (ici un hexagone), c'est également une hauteur : c'est la hauteur d'un des six triangles équilatéraux (dans le cas d'un polygone régulier à n côtés, ce serait n triangles isocèles) obtenus par le découpage standard de l'hexagone (ou du polygone régulier à n côtés) en 6 triangles (en n triangles) groupés autour du sommet. L'élève ne doit pas la confondre avec l'apothème du solide en question, d'où la nécessité de bien les visualiser mentalement. Cette confusion est exacerbée par le fait qu'il s'agit dans les trois cas de hauteurs (mais pour différents objets) dont les mesures interviennent dans les différentes formules de calcul de volume et d'aire latérale et totale.

Bref, de ce dont l'élève a besoin pour réaliser le calcul du volume d'un solide, je constate que la visualisation mentale, c'est-à-dire interne, provenant d'un processus de création d'images mentales d'un objet 3D, constitue une habileté à développer et à maîtriser. Ainsi, elle devient nécessaire pour repérer les constituants d'un objet 3D afin d'en calculer le volume.

ii) Capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D

Dans les dessins 2D d'objet 3D, il existe des cas encore plus difficiles à visualiser mentalement. Par exemple, prenons le cas d'un octaèdre régulier représenté en 2D – perspective cavalière (figure 1.10):

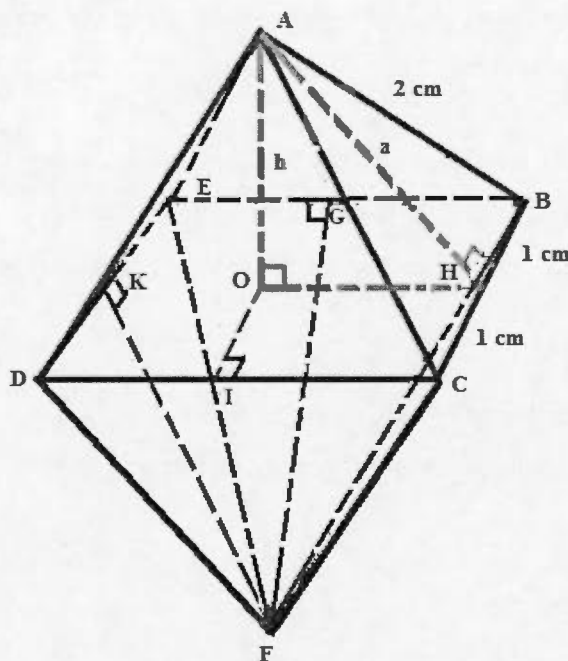


Figure 1.10 Relever la présence de triangles rectangles dans un solide

En fait, je vais spécifier que cette habileté relève de la capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D. Cela revient le plus souvent à imaginer l'objet sous d'autres angles que celui selon lequel l'objet est représenté en 2D, et par conséquent cela revient à être capable d'imaginer, par une série d'images mentales, comment se présente l'objet après rotation, pour nous informer sur tel constituant de l'objet 3D (figure 1.10) : le repérage de triangles rectangles « cachés » sur les faces BCF et ADE de même que le triangle rectangle AOH situé dans l'espace et formé des cathètes AO, HO et de l'hypoténuse AH.

De plus, la rotation d'un solide « imaginée mentalement » permet de reconstituer par des représentations mentales comment nous pourrions le représenter en deux dimensions sur papier selon telle ou telle technique (perspectives cavalière, à 1 ou à 2 points de fuite, etc.) et ce, que ce soit pour en calculer le volume ou pour toute autre tâche qui nécessite une analyse de ses constituants.

iii) Capacité à visualiser les développements plans (patrons) et les projections orthogonales d'un objet 3D

La capacité à comprendre les vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière — qui sont enseignées au secondaire sous le nom de *projections orthogonales*— ainsi qu'à comprendre les développements plans (patrons), font partie aussi de la visualisation interne.

Je vais continuer mon argumentation avec la pyramide droite à base hexagonale (voir exemple 1), dont j'ai dessiné un développement plan possible :

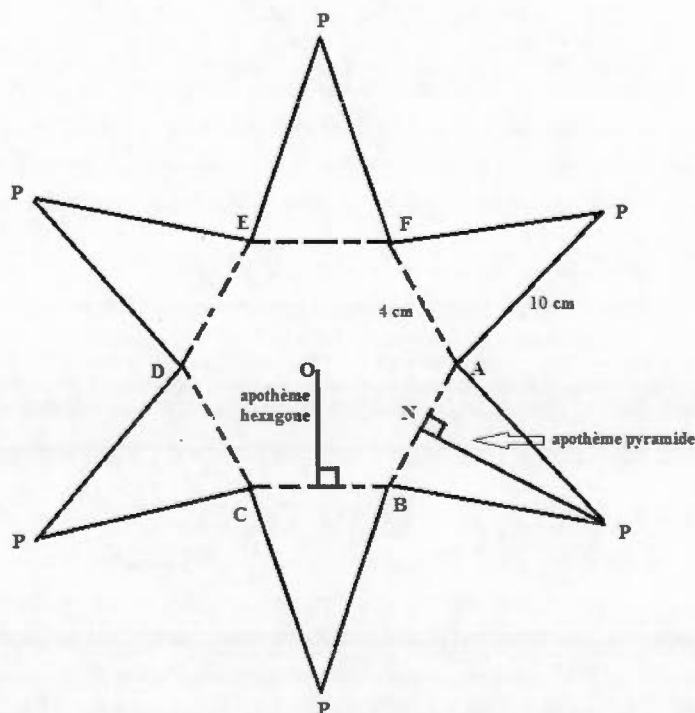


Figure 1.11 Un développement plan possible (patron) de la pyramide

L'élève doit donc décoder adéquatement un développement plan dessiné sur une feuille de papier. Pour qu'une représentation soit un développement plan, toutes les faces doivent être reliées par au moins une arête : c'est ce que nous observons dans la figure 1.11 où chaque face du solide, qu'elle soit hexagonale (face ABCDEF), ou triangulaire (faces PCB, PDC,

PED, PFE, PAF et PBA), est reliée au patron par au moins une arête. Un même polyèdre compte plusieurs développements différents. Pour que deux développements soient considérés comme essentiellement différents, il ne faut pas qu'on puisse les associer par une isométrie du plan.

Il reste le cas des dessins 2D que l'on appelle des projections orthogonales d'objets 3D. Ils concernent les vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière. Je vais recourir à l'exemple 1 et représenter la pyramide selon ses six projections orthogonales (voir figure 1.12). Une projection orthogonale d'un objet en donne souvent une vue pauvre, et même fréquemment méconnaissable. Parfois même, les trois vues habituelles (face, droite et dessus) d'un objet ne permettent pas de le reconnaître sans un grand effort d'imagination. À cet égard, une vue en perspective est beaucoup plus parlante. Par ailleurs, l'avantage d'une projection orthogonale est qu'elle reproduit en vraie grandeur tout ce qui se trouve dans des plans parallèles au plan de projection. Comme on réalise en général trois projections (vue de face, vue de droite et vue de dessus), cela fait beaucoup de parties vues en vraie grandeur. Cette remarque s'applique particulièrement aux objets qui, tels une chaise, une maison ou un cylindre, possèdent des arêtes, des faces, des axes ou plans de symétrie, orthogonaux entre eux, à condition toutefois que ces objets soient adéquatement orientés par rapport aux plans de projection.

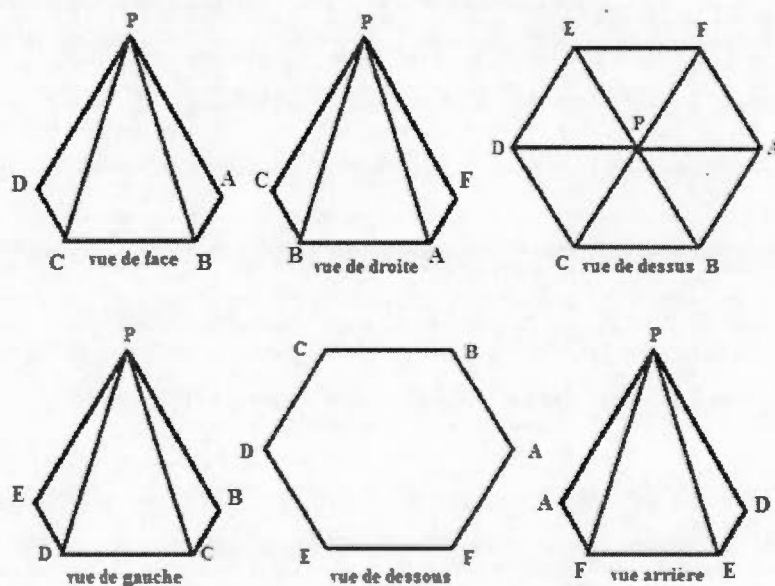


Figure 1.12 Projections orthogonales de l'exemple 1

Il y a aussi la création d'images mentales pour relever la présence d'un triangle rectangle situé à « l'intérieur » de la pyramide. Pour l'élève, ce repérage sera crucial pour appliquer correctement ce qu'on appelle *la relation de Pythagore dans l'espace*. Je crois que pour faciliter ce repérage, l'élève dessine une représentation 2D de la pyramide en identifiant où est situé le triangle rectangle tridimensionnel (les deux cathètes étant l'apothème de l'hexagone et la hauteur de la pyramide ; l'hypoténuse étant la hauteur d'un des six triangles isocèles composant la face latérale de la pyramide).

De plus, pour procéder au calcul du volume, l'élève va se servir de la compétence à visualiser mentalement les constituants de la pyramide (hauteur, apothème de la base, apothème de la pyramide, mesure du demi-côté de la base) pour appliquer correctement la formule de volume de la pyramide.

La visualisation mentale a un rôle à jouer dans le décodage d'un objet 3D. Je vais utiliser l'exemple 2 (voir section 2), où j'avais repéré dans mon vécu d'enseignant une difficulté pour l'élève à décoder la représentation d'un objet 3D donnée sur papier. J'en ai déduit qu'il

y a donc un lien étroit entre décoder une figure 2D sur papier et se représenter mentalement un objet 3D et ses constituants.

Le décodage d'une figure géométrique dessinée en deux dimensions constitue une habileté importante dans une tâche de résolution de problème faisant intervenir le calcul de volume. Il s'agit en fait de reconstituer un objet 3D lorsqu'un dessin 2D, par exemple en perspective cavalière, en est donné. Ce passage peut dans un certain sens être bloqué par l'idée fausse qu'il y a isomorphisme entre l'objet et sa représentation. En effet, la seule représentation ne permet pas de reconstituer l'objet. Une analyse préalable des éléments constitutifs de l'objet est donc nécessaire à toute reconstitution.

Sur la base de mon expérience d'enseignant de mathématique, je fais l'hypothèse que la capacité à comprendre (décodage) et à produire des dessins 2D en perspective (cavalière, à 1 point de fuite, à 2 points de fuite) est un atout majeur dans la compréhension du calcul de volume. Je vais revenir sur ces représentations en perspective dans le cadre théorique.

Je vais maintenant me servir du quatrième exemple : une situation-problème donnée discursivement, celle d'une bouée (une demi-boule surmontée d'un cône droit) dont le volume est donné, mais non la hauteur, et où il est demandé de la calculer ainsi que de produire une représentation 2D de l'objet. J'ai relevé la présence de difficultés à identifier les constituants d'un objet 3D, à décoder la représentation planaire ainsi qu'à déterminer la mesure de la hauteur de manière algébrique.

Cette situation problème relève de deux habiletés inter-reliées : d'abord, la visualisation mentale par la création d'images mentales pour un cône droit et une boule qui lui est superposée, visualisation servant à analyser et décoder les informations clés du dessin 2D (rayon du cône, rayon de la boule, hauteur du cône, apothème du cône). Ensuite, la capacité de produire un dessin 2D du solide décomposable, capacité qui relève des connaissances spatiales dont je vais discuter à la prochaine section.

1.3.3 Troisième habileté : les connaissances spatiales

Je vais me servir de l'exemple 2 (voir section 1.2.2) dessiné en perspective cavalière, où j'ai relevé dans mon vécu d'enseignant une difficulté chez les élèves à identifier les constituants d'un solide décomposable.

Ici, je vais montrer en quoi les connaissances spatiales constituent un besoin pour l'élève et en quoi elles se révèlent une habileté nécessaire à développer et à maîtriser pour calculer le volume d'un solide. Dans la figure 1.13, l'élève doit être capable de percevoir les découpages des objets formant le solide décomposable, mais aussi de les organiser dans un début de modèle théorique, par exemple en prenant conscience de l'organisation des différents segments en cause (mesures des côtés du prisme et de la pyramide, hauteur du prisme, hauteur de la pyramide, apothème de la pyramide, etc.). De plus, c'est là que ça se complique pour l'élève, il y a des éléments de connaissances spatiales qui exigent une structuration géométrique de l'espace, avec un appui sur les notions de plan, de dimension, d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angle (entre deux arêtes, entre deux faces).

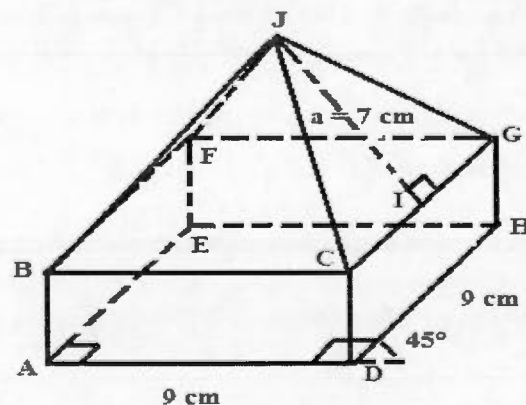


Figure 1.13 Solide décomposable

Par exemple, le repérage des angles (droits, dièdres et digones³) dans le solide décomposable constitue une difficulté pour plusieurs élèves (Grenier et Tanguay, 2008). Ainsi, les angles DAE, HDA, AEH, EHD, JIG n'apparaissent pas droits dans le dessin 2D, mais ils le sont bel et bien dans la réalité. Il y a présence aussi d'angles dièdres dont la mesure est de 90° , entre les faces ABFE et FGHE, FGHE et CGHD ainsi que CGHD et ABCD. Il y a d'autres angles dièdres, entre les faces triangulaires JCB et JBF, JBF et JFG, JFB et JCG, et JCG et JBC de la pyramide droite à base carrée surmontant le prisme droit.

Lorsqu'on regarde les angles dièdres dans le dessin 2D du solide décomposable 3D, on constate visuellement qu'ils ne semblent pas isométriques entre chacune des faces rectangulaires, alors qu'ils le sont dans la réalité. L'élève doit donc le cas échéant prendre conscience que ce qu'il voit dans le dessin 2D entre en conflit avec ce qu'il sait. Il y a donc à réaliser un décodage d'informations clés et ce même décodage peut se révéler une difficulté supplémentaire, pouvant mener à des interprétations erronées. En conséquence, l'habileté « connaissances spatiales » entre en jeu dans le décodage d'un dessin 2D réalisé en perspective cavalière. En plus, cette habileté aura à se développer ce qui signifie qu'elle exigera un entraînement spécifique de la part de celui qui l'exerce.

Avoir en tête une banque d'objets géométriques standardisés autant en 2D qu'en 3D (triangles, rectangles, quadrilatères, polyèdres et corps ronds) fait aussi partie des connaissances spatiales à développer. Dans la figure 1.13, l'élève doit mobiliser ses connaissances spatiales antérieures pour reconnaître le prisme droit à base carrée ainsi que la pyramide droite à base carrée.

D'autres connaissances spatiales concernent la capacité à reconnaître les objets géométriques dans des objets concrets, par exemple se remémorer une maison ayant la forme du solide décomposable de la figure 1.13, dans des représentations telles qu'un dessin

³ J'utilise les définitions de Grenier et Tanguay (2008, p. 28) : *Deux faces adjacentes forment un angle dièdre, qui est l'angle dont le sommet est sur l'arête commune et dont les côtés, perpendiculaires à cette arête, portent chacun un segment inclus respectivement dans chacune des faces. Un angle digone est un angle formé par deux arêtes adjacentes dans une même face.* Il est à noter que 'angle digone' est un néologisme non standard proposé par Grenier et Tanguay.

2D en perspective (cavalière, à 1 ou à 2 points de fuite), de connaître certaines de leurs propriétés, etc.

À la suite de la clarification des trois habiletés nécessaires à une compréhension du volume des solides ainsi qu'à l'hypothèse que j'ai posée, à savoir que l'habileté à comprendre et à être capable de réaliser des dessins en perspective (cavalière, à 1 ou à 2 points de fuite) constitue un atout majeur pour l'élève, j'ai eu envie de voir ce que dit le programme du MELS de ces trois habiletés.

1.4 La géométrie dans l'espace et le volume : ce qu'en dit le MELS

Dans cette section, je vais procéder à une synthèse de tout ce que dit le MELS sur la géométrie spatiale et le volume. Dans un premier temps, je vais faire une recension des locutions clés suivantes : sens spatial, perception spatiale, visualisation, connaissances spatiales, images mentales et volume. Ces mots-clés ont été sélectionnés à travers mes lectures (voir chapitre 2). Ensuite, je vais présenter des extraits du programme de formation, domaine de la mathématique, du MELS, où l'on devine le mieux ce que les auteurs du programme veulent dire quand ils emploient ces locutions clés. Finalement, je proposerai une discussion montrant que ces locutions sont trop vagues, manquent de précision et qu'il faudrait idéalement distinguer des compétences (au sens d'habiletés, de savoir-faire) comme : perception spatiale de la forme globale de l'objet 3D, visualisation directe comme par exemple visualiser le squelette 2D d'un objet 3D que l'on tient dans ses mains, visualisation interne telle que se construire une image mentale d'un objet 3D, une combinaison des visualisations directe et interne amorçant un début d'analyse permettant le décodage d'une représentation d'un solide par une figure 2D, et connaissances spatiales (notions de point, segment, droite, plan, angles, relations d'incidence, d'orthogonalité, de parallélisme).

1.4.1 Recension des locutions clés sur la géométrie 3D et le volume

J'expose ma recension de locutions clés dans le tableau suivant :

Tableau 1.1 Recension des locutions clés en géométrie de l'espace (MELS, 2007)

Locutions clés	Nombre de fois	Précisions selon les auteurs du MELS
Sens spatial	35	<ul style="list-style-type: none"> – sert à créer des images mentales, représentations diverses d'objets 3D/2D – description de figures géométriques – ressource pour comprendre et décrire l'environnement – mesure du volume
Perception spatiale	0	– aucune
Visualisation	1	<ul style="list-style-type: none"> – visualiser des images mentales d'objets 2D/3D – contribue au sens spatial de l'élève
Connaissances spatiales	0	– aucune
Images mentales	6	– se construire ou se donner une image mentale d'une figure 2D ou 3D
Volume	43	<ul style="list-style-type: none"> – recherche d'une mesure manquante – construction des formules de volume – mesure de l'espace

La locution clé « sens spatial » revient 35 fois dans le programme québécois de formation (enseignement secondaire), domaine de la mathématique. Je présente des extraits où l'on « devine » le mieux ce que les auteurs du programme veulent dire par « sens spatial » :

- 1) Sens spatial, servant à se construire une image mentale de figures géométriques dans une situation-problème mais aussi, comme techniques de représentation des objets 3D/2D :

En géométrie, l'élève qui décode une situation problème fait appel à son sens spatial et à son sens de la mesure pour dégager la tâche à réaliser et explorer des pistes de solution. Il se donne une image mentale des figures qui font partie de la situation-problème. Il représente de diverses façons des objets en deux ou trois dimensions en s'aidant, au besoin, d'instruments ou de logiciels de géométrie. Dans l'élaboration d'une solution où il doit chercher des mesures manquantes de longueurs, d'aires ou de volumes, afin de les optimiser s'il y a lieu, il met à profit des définitions, des propriétés ou des relations en manipulant des expressions

numériques et algébriques. Il structure et justifie les étapes de sa démarche à l'aide de propriétés et d'énoncés admis. Il s'assure que le résultat qu'il obtient est plausible d'après le contexte et l'exprime avec l'unité de mesure appropriée. Il profite du moment consacré à l'échange de solutions pour enrichir son réseau de relations et de stratégies. (MELS, 2007, p. 21)

2) Sens spatial en tant que compétence intervenant dans la description des figures géométriques et de plans d'assemblages

L'élève pourra aussi, par exemple, exercer son sens spatial en décrivant les anomalies dans des figures dites impossibles (ex. M. C. Escher) ou dans des plans d'assemblage qui ne conduisent pas toujours à la formation de l'objet désiré. (MELS, 2007, p. 98)

3) Sens spatial : une ressource pour comprendre et décrire l'environnement physique

La mathématique est un outil privilégié pour construire l'interprétation du réel. Pour comprendre et décrire l'environnement physique, on utilise des ressources relatives au sens spatial telles que la représentation, la position et le mouvement, l'ordre de grandeur, le repérage, les échelles et la mesure. L'analyse d'informations, de comportements et de phénomènes prend un sens dans le traitement de données par le truchement de l'observation, la modélisation, la corrélation, les liens de dépendance, les graphes, les probabilités et la statistique de même que le raisonnement proportionnel. (MELS, 2007, p. 114)

La locution clé « visualisation » apparaît une seule fois dans les écrits officiels du MELS (domaine de la mathématique). Les auteurs du MELS ne précisent pas du tout ce qu'ils veulent dire par « visualisation ». Toutefois, ils affirment un point important, à savoir que la visualisation jumelée à la manipulation et la représentation d'objets différents aident au développement du sens spatial chez l'élève :

La visualisation, la manipulation et la représentation de différents objets contribuent au développement du sens spatial chez l'élève. La représentation en deux dimensions de figures à trois dimensions et, réciproquement, la construction de solides à partir de représentations à deux dimensions lui permettent d'explorer plusieurs procédés tels que le développement d'un solide, les projections orthogonales avec les différentes vues, les projections parallèles (perspectives cavalière et axonométrique) ou les projections centrales (à un ou deux points de fuite). Toutes ces représentations sont des outils de communication qui permettent d'interpréter la réalité et qui apportent des informations spécifiques. L'élève détermine la meilleure façon de représenter en deux dimensions un modèle en trois dimensions. Il prend conscience aussi qu'une représentation en deux dimensions peut l'amener à construire des solides différents. Les activités d'exploration et de manipulation qu'il effectue contribuent à l'appropriation du concept de mesure, à

la construction de formules relatives au volume, à la consolidation du concept d'aire ainsi qu'à l'exploitation de liens entre des concepts géométriques et algébriques. De plus, l'élève est amené à distinguer les concepts de volume et de capacité et à mettre à profit le raisonnement proportionnel pour effectuer diverses conversions. (MELS, 2007, p. 62)

Les locutions clés « perception spatiale » et « connaissances spatiales » n'apparaissent nulle part dans les documents officiels du MELS. Je crois que les auteurs auraient dû faire intervenir ces concepts clés et les distinguer. En effet, la perception spatiale n'est pas synonyme de connaissances spatiales. Percevoir ou voir des objets dans l'espace est tout à fait différent de posséder des connaissances sur ces mêmes objets. À mon avis, il y a là un problème important, à savoir entre le « voir » et le « savoir » relatifs à un objet physique ou un objet géométrique 3D : se pourrait-il que ce qu'on « voit » d'un objet 3D puisse entrer en conflit avec ce qu'on « sait » du même objet ? Quand est-ce que les perceptions spatiales peuvent prendre appui sur les connaissances spatiales, et quand est-ce à l'inverse qu'elles jouent les unes contre les autres ? La compréhension de ce possible conflit pourrait-il m'aider, comme chercheur, à mieux comprendre le ou les rôles de la perception spatiale et des connaissances spatiales, et ce, lorsqu'il sera question d'utiliser les techniques de représentations des objets de l'espace (qui font partie des connaissances spatiales) dans l'application des formules de volumes ?

La locution clé « image mentale » revient à six reprises dans le programme du MELS. Dans les six occurrences identifiées, elle signifie que l'élève se donne, se construit, se forme ou se crée une image mentale.

Dans une autre occurrence, il est question de l'emploi d'outils technologiques pour aider à visualiser et à se construire des images mentales.

L'apprentissage est également soutenu par la technologie. [...] (MELS, 2007, p. 101) [...]

Stratégies d'élaboration : utiliser des moyens mnémoniques (mots-clés) ; se créer une image mentale ; reformuler ou réécrire en ses propres mots (paraphraser) ; [...] (MELS, 2007, p. 115)

Le mot clé « volume » apparaît 43 fois dans le programme de formation du MELS. J'ai identifié les trois contextes d'utilisation suivants :

1) La recherche d'une mesure manquante pour calculer un volume

D'autres situations requièrent différentes relations associées aux figures géométriques. Elles nécessitent entre autres la recherche de mesures manquantes (longueur, aire, volume) à l'aide de différentes relations métriques ou trigonométriques faisant intervenir des triangles rectangles ou des figures isométriques, semblables ou décomposables. (MELS, 2007, p. 25)

2) La construction des formules relatives au volume

Les activités d'exploration et de manipulation qu'il effectue contribuent l'appropriation du concept de mesure, à la construction de formules relatives au volume, à la consolidation du concept d'aire ainsi qu'à l'exploitation de liens entre des concepts géométriques et algébriques. De plus, l'élève est amené à distinguer les concepts de volume et de capacité et à mettre à profit le raisonnement proportionnel pour effectuer diverses conversions. (MELS, 2007, p.62)

3) Le volume est aussi vu comme mesure de l'espace dans l'utilisation des unités de volume et des relations entre elles (MELS, 2007, p. 53).

1.4.2 Concepts et processus prescrits par le MELS

Pour compléter ma recension des locutions clés, je présente dans le tableau 1.2 les concepts et processus prescrits par le MELS, sur le sens spatial et des figures géométriques.

Tableau 1.2 Sens spatial et figures géométriques (Source : MELS, 2007, p. 61)

Sens spatial et figures géométriques	
Concepts	Processus
<ul style="list-style-type: none"> – Solides • Développement, projection et perspective • Mesures <ul style="list-style-type: none"> – Volume – Unités de mesure pour les volumes – Relations entre les unités de volume du 	<ul style="list-style-type: none"> – Analyse de situations mettant à profit des propriétés des figures <ul style="list-style-type: none"> • Description et construction d'objets • Représentation dans le plan de figures à trois dimensions à l'aide de différents procédés • Recherche de mesures manquantes <ul style="list-style-type: none"> – Longueurs <ul style="list-style-type: none"> ✓ Côtés d'un triangle rectangle (relation de Pythagore) ✓ Segments provenant d'une isométrie, d'une similitude, d'une figure plane ou d'un solide – Aires <ul style="list-style-type: none"> ✓ Sphère, aire latérale ou totale de cônes droits et de figures décomposables

système international, y compris les mesures de capacité	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Figures issues d'une similitude – Volumes ✓ Solides décomposables en prismes droits, en cylindres droits, en pyramides droites, en cônes droits, en boules ✓ Solides issus d'une similitude Choix approprié d'une unité de mesure <ul style="list-style-type: none"> ✓ Conversions entre diverses unités de mesure (longueur, aire, volume, capacité)
--	---

À la suite de cette recension des locutions clés du MELS, je vais montrer en quoi je les juge trop vagues, trop générales, et en quoi elles ne recouvrent pas bien les 3 habiletés à développer, que j'ai identifiées dans les 4 problèmes analysés dans les sections précédentes de ce mémoire. L'étude faite à travers la construction du cadre théorique aidera à préciser la terminologie et les concepts sous-jacents.

1.4.3 Discussion sur les compétences du MELS

a) Les locutions « sens spatial », « visualisation » et « image mentale »

Le MELS discute à 35 reprises de la locution « sens spatial » dans le programme. En aucune occasion, il ne définit ce qu'est le sens spatial, ni ne l'identifie clairement. Toutefois, il mentionne son utilité : construire des images mentales, représenter divers objets 2D/3D, une ressource pour comprendre l'environnement et aider à mesurer le volume.

Dans la liste des trois compétences que j'ai élaborée, à savoir la visualisation, la perception spatiale et les connaissances spatiales, celle ayant certains éléments en commun avec la compétence « sens spatial » du MELS serait la visualisation ou encore la combinaison de la perception et de la visualisation, notamment parce que le MELS insiste sur la création d'images mentales aidant au sens spatial.

La capacité à visualiser, que je désigne sous le vocable « visualisation », n'apparaît sous ce vocable qu'une seule fois dans le programme de formation. De plus, le MELS ne définit pas ce qu'elle est. Toutefois, il nous informe de son utilité : visualiser des images mentales de

figures 2D/3D. Le programme précise également qu'il est souhaitable qu'elle soit jumelée à la manipulation d'objets 3D et à l'élaboration de dessins 2D d'objets 3D. De plus, la locution « image mentale » revient à six occasions dans le programme et à chaque fois, elle est couplée à la visualisation pour mener à la signification que je viens de mentionner.

D'après les habiletés que j'ai identifiées pour la présente étude, la « visualisation interne » rejoint partiellement la compétence visualisation du MELS en ce que celui-ci indique la construction d'images mentales servant à visualiser des figures 2D/3D ou des objets 3D. Néanmoins, le MELS n'est pas assez précis sur cette compétence à mon avis, et encore une fois, il ne la définit pas vraiment. J'ai décrit de manière détaillée comment je l'envisage (voir section 1.3.2) et j'ai élaboré des sous-catégories de visualisation (directe et interne) qui sont spécifiques à telle difficulté que j'ai relevée dans mon vécu d'enseignant de mathématiques : visualisation directe des constituants d'un objet 3D ou dessiné en 2D (voir les exemples 1 et 2, section 1.2), recours à la visualisation directe et interne pour décoder la représentation d'un objet 3D lorsqu'elle est donnée sur papier (voir exemple 2 section 1.2), capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D (voir exemple de l'octaèdre dessiné en 2D), capacité à visualiser les développements plans (patrons) et les projections orthogonales d'un objet 3D (voir section 1.3.2).

Qui plus est, un élément déterminant dans l'habileté « visualisation spatiale » est le rôle qu'elle joue dans le décodage d'une représentation plane d'un objet 3D, c'est-à-dire dans l'interprétation issue de la visualisation d'informations clés du dessin 2D, comme je l'ai illustré avec le cas du solide décomposable de l'exemple 2 (prisme droit à base carrée surmontée d'une pyramide droite à base carrée). Ce décodage sera explicité davantage dans le cadre théorique. Or, pour plusieurs élèves, cette visualisation spatiale (externe et interne) se révèle être une difficulté. Une manière de « minimiser » celle-ci serait que les élèves en prennent conscience et qu'ils comprennent quelles informations clés sont perdues dans le dessin 2D de l'objet 3D, justement en développant la compétence à « visualiser » dans l'espace.

b) La compétence « connaissances spatiales»

À mon grand étonnement, la locution « connaissances spatiales » n'est même pas évoquée dans le programme de formation du MELs. Toutefois, les auteurs du MELs emploient à une occasion les termes « *descriptions d'une figure géométrique 2D/3D* », ce qui pourrait correspondre à certains des éléments des connaissances spatiales que j'ai repérés dans mes exemples. Entre autres, lorsque j'ai étudié l'exemple 2 (section 2), j'ai fait le constat que l'identification de certains constituants d'un solide décomposable relève des connaissances spatiales telles que les notions de plan, d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité et d'angles (voir figure 1.13).

J'ai montré dans l'analyse de cet exemple 2 que les connaissances spatiales se révèlent être une habileté nécessaire à développer pour calculer le volume d'un solide décomposable. Par exemple, prenons le cas de l'identification du triangle rectangle dans la pyramide droite à base carrée surmontant le prisme droit. Ce repérage exige de décoder des informations clés dans le dessin 2D tels que les deux cathètes (demi-côté de la base carrée de la pyramide droite et hauteur de la pyramide) ainsi que de l'hypoténuse (apothème de la pyramide droite). Ainsi, ce décodage d'informations effectué par l'élève constitue une autre difficulté pouvant le mener à des interprétations, erronées ou non, qui sont fortement tributaires de certains éléments des connaissances spatiales. C'est la raison pour laquelle je considère les connaissances spatiales comme habileté à développer, entre autres lors du décodage d'un dessin 2D d'un objet 3D réalisé selon les perspectives cavalière, à 1 ou à 2 points de fuite.

Qui plus est, je fais aussi l'hypothèse que le développement des deux compétences « visualisation spatiale » et « connaissances spatiales » se réalise en interdépendance et en symbiose, s'appuyant l'une sur l'autre. Certains éléments de ces deux compétences sont communs aux deux types, à savoir :

- Décoder une représentation 2D d'un objet 3D (voir exemple 2 section 2)
- Visualiser un objet 3D à partir d'une représentation 2D ou même d'une description discursive (voir exemple 4 section 2)

Cette hypothèse, je vais la confronter à ce qu'en dit la communauté des chercheurs afin de la valider ou de l'infirmier dans la littérature scientifique. Finalement, contrairement à ce qu'il en est dans les documents du MELS, j'ai caractérisé les connaissances spatiales telles qu'explicitées dans la section 2 aux pages 28 à 30 de ce mémoire.

Maintenant, je vais aller voir dans la littérature scientifique ce que dit la communauté de recherche sur les habiletés que je juge essentielles à la compréhension du volume : la visualisation, la perception spatiale et les connaissances spatiales.

1.5 Deux études de la communauté des chercheurs

Dans cette section, je vais présenter deux études montrant que l'apprentissage du volume doit être conduit concomitamment à un développement de la visualisation spatiale.

Première étude

Janvier (1992, 1994, 1997) a axé une partie importante de ses travaux de didacticien sur le concept de volume et son enseignement au niveau secondaire. Pour ce chercheur et didacticien, l'enseignant doit orienter son enseignement sur la représentation spatiale des objets géométriques afin que les élèves puissent « raisonner » sur les formules de volume.

Autrement dit, dans l'enseignement de la géométrie de l'espace en ce qui concerne le calcul du volume des solides, il s'avère très utile pour l'élève de bien comprendre les techniques de représentations d'objets 3D (perspectives, projections orthogonales — vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière —, développements plans) afin d'une part de recourir à la visualisation pour s'imaginer mentalement où sont situés les constituants du solide et d'autre part, une fois qu'ils sont bien identifiés, de procéder ensuite au calcul de volume auquel s'applique la formule adéquate.

Pour Janvier, il est nécessaire de faire raisonner sur les formules de volume:

Il faut changer l'approche utilisée dans l'enseignement du volume. Les élèves échoueront tant qu'ils ne raisonneront pas les formules. Raisonner une formule consiste à :

a) s'appuyer sur une formule de base pour déduire la formule de chaque classe de solides, b) reconnaître la classe de solides à laquelle s'applique une formule particulière, c) reconnaître les éléments de la formule dans la représentation spatiale du solide dans le but d'effectuer les bonnes opérations. Pour amener les élèves à raisonner les formules, on doit mettre l'accent sur la représentation spatiale des objets géométriques auxquelles s'appliquent ces formules. Au deuxième cycle du secondaire, il faut donc amener les élèves à se représenter mentalement des solides dessinés dans le plan. (Janvier, 1997, p. 29)

Autre étude de Janvier (1992)

Une autre étude de Janvier (1992) a trait au volume comme instrument de conceptualisation de l'espace. Le chercheur insiste sur un point crucial : présenter aux élèves des exercices axés sur des objets concrets. Toutefois, puisque les problèmes traitant du concept de volume sont la plupart du temps représentés dans le plan, il est important d'utiliser tous les moyens possibles afin que les élèves comprennent adéquatement et sans ambiguïté les représentations dans le plan de ces objets tridimensionnels. Qui plus est, dans les planifications d'enseignement de la géométrie de l'espace ayant trait au volume, il faut respecter une « alternance » entre la construction d'objets tridimensionnels à partir de différents dessins et la réalisation de reproduction par dessin d'objets tridimensionnels variés.

Janvier montre qu'une compréhension adéquate de la notion de volume constitue un élément déclencheur pour développer les habiletés spatiales, plus spécifiquement dans la représentation spatiale des objets géométriques:

L'analyse de la notion de volume que nous avons présentée avec quelques épisodes d'enseignement a permis de montrer comment le concept de volume peut être considéré comme un catalyseur d'habiletés spatiales. Elles exigent une coordination du numérique avec le visuel, coordination qu'il faudrait mieux connaître pour concevoir un enseignement amélioré de la notion de volume. (Janvier, 1992, p. 78)

Janvier déduit que faire « raisonner » sur les formules de volume des solides amène à conceptualiser l'espace et que cela se réalise simultanément par le développement d'habiletés spatiales telles que deviner l'effet de la rotation d'un solide, être capable de reconnaître des plans, le parallélisme et l'orthogonalité dans des dessins 2D d'objets 3D :

Savoir prévoir le résultat d'une rotation d'un solide autour d'un axe, pouvoir reconnaître des plans ou encore, des droites parallèles dans des représentations 2D de configurations spatiales, identifier sur un dessin les directions orthogonales sont d'autant d'habiletés spatiales qui témoignent d'une conceptualisation de l'espace. (Janvier, 1992, p. 63)

Le volume (avec toutes ses compétences sous-jacentes) ne joue pas seulement un rôle complémentaire par rapport aux autres concepts organisateurs usuels : parallélisme, orthogonalité, angle dièdre, distance...; mais, à bien des égards, il agit d'une manière originale. Pour illustrer ce point de vue, nous entendons montrer que : trouver le volume de formes diverses, déformer des solides pour en comparer le volume, déduire des formules de volumes... entraîne une forme de conceptualisation de l'espace à laquelle correspondent des habiletés spatiales. (Janvier, 1992, p. 64)

Dans la démarche proposée par Janvier pour faire raisonner sur les formules de volume, il montre, par exemple, que pour arriver à comprendre la formule de volume du prisme droit, l'élève doit bien visualiser la décomposition en tranches du prisme, donc qu'il doit se servir de sa perception spatiale.

La décomposition en tranches du prisme droit ou encore la capacité de visualiser cette décomposition tout en l'articulant avec le dénombrement requis pour trouver le volume est une habileté majeure requise pour obtenir la formule de volume du prisme droit. Intervient également la conviction que la somme des unités du solide entier est la somme du nombre d'unités dans chaque tranche : une propriété naturelle de la mesure. La première formule à laquelle on aboutit est donc :

$$VOLUME = \text{nombre d'unités par tranche} \times \text{nombre de tranches}$$

(Janvier, 1992, p. 69)

Deuxième étude (Tanguay, 2010)

Un autre didacticien, Tanguay, a repris une des études de Janvier (1994) s'intéressant aux difficultés des élèves face au concept de volume. Dans sa synthèse du travail de Janvier, Tanguay (2010) repère trois difficultés ayant trait spécifiquement à la perception spatiale

ainsi qu'aux connaissances spatiales pour le calcul de volume. Une de ces difficultés se rapporte à une conception procédurale de la formule de volume, qui ne s'appuie pas sur un raisonnement et sur une représentation spatiale de l'objet dont on mesure le volume.

Une deuxième difficulté concerne le repérage des éléments de la formule de volume dans la représentation 2D de l'objet 3D : confusion hauteur-apothème, confusion hauteur-arête ; représentation mentale de la hauteur abaissée sur un plan ; difficulté à concevoir plusieurs bases et plusieurs hauteurs associées, pour un même solide.

Une troisième difficulté réside dans le calcul des volumes complexes en ce qui a trait à la perception du bon découpage pour des solides décomposables ainsi qu'à la perception du découpage en tranches à la base de l'application du principe de Cavalieri.

L'étude de Tanguay vient corroborer ce que j'ai constaté dans mon vécu d'enseignant de mathématiques en 3^e secondaire, entre autres à travers les quatre exemples dont j'ai discuté antérieurement.

Tanguay reprend de Janvier une démarche qui aide à minimiser les différentes difficultés face à la compréhension du volume. Dans cette démarche, il y a présence de trois arguments ayant trait à la perception spatiale et aux connaissances spatiales favorisant une « bonne » application de la formule de volume :

- S'appuyer sur des décompositions spatiales (visualisation du découpage en tranches dans le cas des prismes droits) et des reconstructions spatiales (d'un autre solide à partir du solide initial, dans le cas des pyramides, de la sphère ...) ; bref, sur des actions, intériorisées ou non.
- Recourir à des unités non conventionnelles. Retarder l'introduction aux unités standard (toujours dans le but de retarder les automatismes de calcul, de favoriser la décomposition mentale du solide). Favoriser des activités de comparaison entre solides, retarder le « numérisme » (recours plus ou moins systématique aux nombres).
- Idée de « construire » les formules, de les déduire les unes des autres, en allant des plus simples aux plus complexes, et en élargissant sans cesse les classes de solides auxquelles elles s'appliquent. (Tanguay, 2010, p. 10)

1.6 Énoncé du problème de recherche

Je vais procéder à une synthèse des éléments montrant qu'il y a un problème bien réel dans la compréhension du concept de volume des solides et des formules de volume relatifs aux solides pour les élèves du secondaire (2^e cycle), et je chercherai à mettre en évidence l'importance du rôle des connaissances spatiales en jeu.

Dans un premier temps, j'ai effectué une recension de la littérature scientifique en didactique des mathématiques ayant trait à mon problème de recherche, et j'ai fait le constat qu'il y a peu de recherche qui pourraient expliquer le rôle des connaissances spatiales en lien avec la compréhension du concept de volume par les élèves du secondaire.

Dans la recherche, il y a deux avenues concernant le thème ici en cause. D'une part, des chercheurs ont réalisé des recherches et des expérimentations sur les connaissances spatiales impliquant soit la visualisation (Presmeg, 1985, 1986a, 1986b, 2006 ; Bishop, 1980, 1983, 1988 ; Boubilil-Ekimova, 2010), soit les représentations mentales (images mentales) d'objets géométriques (Grenier et Tanguay, 2008 ; Parzysz, 1991 ; Berthelot et Salin, 1993 ; Janvier, 1992) ; d'autre part, d'autres chercheurs ont étudié le concept de volume ainsi que les formules de volume des solides usuels du point de vue de l'enseignement, et ont même proposé soit des séquences d'enseignement (Janvier, 1994), soit une démarche cherchant à réduire le nombre de difficultés qu'éprouvent les élèves face au concept de volume (Tanguay, 2010).

- Des recherches démontrent qu'en apprentissage de la géométrie à trois dimensions, la visualisation et la représentation spatiale constituent une difficulté pour plusieurs élèves (Boubilil-Ekimova, 2010) et que cette même visualisation d'objets géométriques en 3D, selon d'autres chercheurs (Clements & Battista, 1992 ; Hughes-Hallet, 1991 ; Whiteley 1996 ; Dreyfus, 1991, 2002), aide au développement du sens spatial.
- Dans la représentation des objets géométriques 3D tels que les solides usuels (polyèdres et corps ronds), il y a présence chez l'élève du conflit *vu-su* (Parzysz, 1988), le *vu* relevant de la perception spatiale et le *su* des connaissances spatiales. À partir de ce constat, on ne peut dessiner des figures de l'espace que si l'on *sait*

comment en sont disposés les divers éléments. Le dessin, s'il peut aider au repérage de ces éléments, peut aussi dans certains cas être source d'illusions, et même d'erreurs. Alors qu'en géométrie plane on peut raisonner *à partir* du dessin et de la figure, donc *après* avoir exécuté la représentation visuelle, en géométrie de l'espace on est contraint de raisonner *avant* de dessiner et de n'attribuer au dessin que les propriétés dont on *sait* qu'elles sont celles du solide représenté.

- Dans l'enseignement de la géométrie spatiale, des difficultés sont liées aux connaissances spatiales. L'apprentissage de la géométrie par les élèves du secondaire repose sur une structuration de l'espace qui dépend étroitement de leurs connaissances spatiales (Parzysz, 1988, 1989). Ces connaissances se forment de manière progressive par l'intériorisation des actions effectives dans et sur l'environnement spatial de l'élève. Certains auteurs (Berthelot et Salin, 1992 ; Parzysz, 1989, 1991) attribuent des difficultés en géométrie, notamment en géométrie de l'espace, au fait que des élèves auraient vécu trop peu d'expériences relatives à l'espace (motricité, etc.) dans leur enfance, ou au fait que les enseignants proposent trop précocement de travailler sur des représentations et non sur des objets, ou sur des actions visualisées et non exécutées.
- Or, il existe peu d'outils disponibles en classe de mathématiques pour les élèves de 12 à 17 ans, visant à supporter l'enseignement de la géométrie de l'espace, et plus globalement, le développement des connaissances et compétences spatiales (Marchand, 2006 ; Bessot, 1993 ; CREM, 2001 ; Parzysz, 1991).
- Des didacticiens (Janvier, 1994, 1997 ; Tanguay, 2010) suggèrent que l'enseignant de mathématiques de niveau secondaire doit axer son enseignement sur les représentations spatiales des objets géométriques, afin que les élèves puissent « raisonner » sur les formules de volume.
- Des chercheurs, tels Clements & Battista, (1992), Hughes-Hallet (1991) et Whiteley (1996), ont montré qu'il y a une corrélation positive entre le développement des connaissances spatiales et la réussite mathématique à tous les niveaux.

En conséquence de ce qui précède, nous en sommes venus à formuler le problème suivant :

Le rôle des connaissances spatiales dans la compréhension du concept de volume et des formules de volume relatives aux solides usuels est souvent négligé dans l'enseignement secondaire. Des pratiques et des études antérieures (Clements & Battista, 1992 ; Marchand, 2006 ; Janvier, 1992, 1994, 1997 ; Pallascio, Papillon et Dion, 1985, 1986, 1990 ; Pallascio, Talbot, Allaire et Mongeau, 1990 ; Gutiérrez, 1992, Parzysz, 1988, 1991 ; Anwandter-Cuellar, 2013) ont souligné les difficultés qu'éprouvent les élèves et même les enseignants lors d'activités qui font appel aux connaissances spatiales, par exemple dans le calcul de volumes.

Bref, je peux déduire qu'il y a un besoin réel pour de la recherche portant sur les processus d'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, face au rôle que peut y jouer le développement des connaissances spatiales. Ainsi, j'évalue que ma recherche s'avèrera pertinente scientifiquement, c'est-à-dire que les connaissances nouvelles qui y seront produites pourront contribuer au développement de la didactique des mathématiques comme domaine scientifique.

1.7 Questions de recherche

Je vais conclure avec une première formulation de mes questions de recherche en faisant intervenir les mots que nous j'ai définis plus tôt.

- 1) Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volumes de solides usuels ?
- 2) Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?
- 3) Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

CHAPITRE II

CADRE THÉORIQUE

À travers notre recherche, nous cherchons à mieux comprendre le rôle des connaissances spatiales dans la compréhension du concept de volume et des formules de volume relativement aux solides usuels tels que les polyèdres et les corps ronds. Cela nécessite une clarification de ce qui est entendu par les concepts de *connaissances spatiales*, de *perception spatiale* et de *visualisation*.

Dans ce 2^e chapitre, nous allons proposer, dans un premier temps, une analyse des concepts-clés liés à notre recherche, puis nous allons établir les assises théoriques encadrant notre problème de recherche.

2.1 Analyse des concepts-clés et revue de littérature

Les concepts-clés que nous allons définir, utiliser et analyser dans cette recherche sont les suivants : 1) Les images mentales, représentations mentales, représentations comme signifiants d'un signe ou figures, différences entre figure, dessin et représentations ; 2) la perception et la visualisation spatiales versus les connaissances spatiales ; 3) les représentations en perspective ou par projection des objets de l'espace ; 4) le volume.

Tel que discuté dans notre problématique, nous avons identifié quatre difficultés majeures chez les élèves du secondaire confrontés à des tâches de résolution de problème faisant intervenir les formules de volume :

- difficulté à identifier les constituants d'un objet 3D et à déterminer une mesure manquante (voir exemple 1, section 1.2.1)

- difficulté à décoder la représentation d'un objet 3D lorsqu'elle est donnée sur papier (voir exemple 2, section 1.2.2)
- difficulté à visualiser et à se construire une image mentale (voir exemple 3, section 1.2.3)
- difficulté à dessiner un objet 3D par une technique de représentation lorsque le problème posé n'est donné qu'en mots et qu'une mesure est manquante (voir exemple 4, section 1.2.4)

Nous avons montré au chapitre 1 que ces quatre difficultés provoquent le besoin de développer chez l'élève du secondaire des habiletés (savoir-faire) telles que la perception spatiale, la visualisation spatiale et les connaissances spatiales, pour résoudre une situation problème comportant un calcul de volume. Nous remarquons que parmi les 3 habiletés, la perception spatiale est celle qui est la plus difficile à travailler directement à travers des tâches de résolution de problème (voir problématique, section 1.3). Ceci nous amène à discuter de visualisation, d'image mentale, de représentation mentale, et des différences entre figure, dessin et représentation.

2.1.1 Les images mentales

De quoi est faite une image mentale et comment se forme-t-elle ? Le physicien Einstein et le mathématicien Poincaré ont rapporté qu'ils se représentaient leurs problèmes complexes grâce à des figures dessinées sur une sorte de « tableau noir mental ». Et plus généralement, nombreux ont été les auteurs dans la communauté des chercheurs à admettre que la pensée elle-même avait quelque chose à voir avec une forme ou une autre de création d'images mentales.

Aujourd'hui, grâce aux technologies par résonance magnétique et aux procédés de balayage électronique (*scanning*) du cerveau humain, des méthodes astucieuses permettent l'observation indirecte de ces images mentales.

Dans la communauté de recherche, deux types d'approches ont permis d'étudier la nature des images mentales : une première s'attache à la relation existant entre l'image mentale et la perception, tandis que la deuxième approche explore la structure de l'image elle-même.

Nous avons relevé que le terme « image mentale » n'a pas toujours la même signification d'un chercheur à l'autre. Dans notre étude, le sens qui nous intéresse est celui évoqué lorsque nous sommes en présence d'objets 3D réels ou quand nous percevons un dessin 2D d'un objet 3D sur une feuille de papier ou sur un écran numérique, ou encore lorsque nous représentons par une technique de dessin (perspective cavalière, perspectives à 1 ou à 2 points de fuite) un objet 3D. Mais avant de définir précisément ce que nous entendons par « image mentale », nous allons présenter le sens que lui donnent les deux chercheuses suivantes : Presmeg et Marchand.

Le sens d'image mentale selon Norma Presmeg

Presmeg, qui a produit plusieurs recherches sur les images mentales et la visualisation en mathématiques (1985, 1986a, 1986b, 1991, 1992, 1997a, 1997b, 2006), propose de définir une image mentale comme un schème mental représentant l'information spatiale ou visuelle, avec ou sans la présence d'un objet ou d'une représentation externe. De plus, cette chercheuse a établi une typologie d'images mentales se résumant ainsi :

- les images concrètes, notre traduction de *concrete, pictorial imagery (pictures-in-the mind)* : ce sont des images provenant de la perception d'objets physiques (objets de la vie courante : table, ordinateur, automobile, avion, etc.)
- les images de modélisation, notre traduction de *pattern images (pure relationships depicted in a visual spatial scheme)* : des images représentant des relations abstraites d'une façon visuelle.
- les images dynamiques, notre traduction de *dynamic (moving) imagery* : ce sont des images ayant été créées, transformées ou communiquées à l'aide de mouvements physiques : déterminer une rotation qui s'applique à un solide.

Dans notre étude, nous allons nous servir des trois sens de l'image mentale spécifiés par Presmeg. Ainsi, dans une tâche de résolution de problème comportant un calcul de volume de solides, il sera très utile à l'élève de se construire des images mentales concrètes s'il est en présence d'objets physiques. De plus, il aura besoin de créer des images mentales de modélisation pour l'aider à se représenter certaines relations mathématiques d'un objet 3D (par exemple, la hauteur ou l'apothème d'une pyramide droite à base hexagonale). Et il aura également besoin de se créer des images mentales dynamiques à l'aide de mouvement de l'œil ou de son propre corps face à un objet 3D réel.

En conséquence, nous constatons que les images mentales sont « intimement » liées au processus de visualisation d'un objet 3D, qu'il soit réel, dessiné sur papier ou issu d'une lecture de texte ne comportant aucun dessin. Tel que discuté dans notre problématique (voir section 1.4.2), nous précisons qu'il existe des images mentales provenant d'un processus de visualisation directe d'objets 3D, soit réels, soit dessinés sur une feuille de papier ou apparaissant sur un écran (ordinateur, TV, appareil numérique, etc.) et qu'il existe également des images mentales résultant d'une visualisation interne, c'est-à-dire celles issues d'une pure création de l'imagination.

Le sens de l'image mentale selon Marchand

Marchand (2006) a étudié les interrelations des images mentales dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle. Elle définit le concept « image mentale » de cette façon :

Image mentale : représentation mentale d'objets ou d'événements qui ne sont pas physiquement présents. Il y a trois types d'images mentales : statique, cinétique (transformation isométrique) et transformatrice (déformation). Ces types d'images peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/événement a déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/événement n'a jamais été vu concrètement. (Marchand, 2006, p. 107, caractères gras de l'auteure)

Encore une fois, le sens d'image mentale est lié spécifiquement au processus de visualisation d'un individu, que ce soit avec des objets 3D déjà vu ou non.

Le sens de l'image mentale dans notre étude

Nous allons définir ce que nous entendons par « image mentale » en restreignant spécifiquement cette signification à notre domaine d'étude.

Pour nous, une image mentale constitue une représentation cognitive d'objets géométriques 3D qu'on n'a pas sous les yeux, et qui résultent d'un processus de visualisation spatiale. Ces représentations cognitives peuvent s'appuyer sur et s'intégrer à des propriétés connues de l'objet 3D en question, quand l'individu a bien assimilé ces propriétés. Il y a trois types d'images mentales : images concrètes, images de modélisation et images dynamiques. Ces types d'images peuvent être reproductrices dans le cas où l'objet/phénomène a déjà été vu concrètement par le sujet, ou anticipatrices quand l'objet/phénomène n'a jamais été vu concrètement. L'image mentale créée par un individu peut provenir d'un objet concret vu dans le passé, d'un dessin 2D, d'un modèle 3D, d'une description verbale ou écrite, d'une définition ou même encore, à un niveau plus avancé, d'un énoncé symbolique.

Mais alors une question se pose : en quoi les images mentales d'un objet 3D sont-elles différentes des représentations mentales de ce même objet 3D ? Cela nous oblige donc à préciser le sens de « représentations mentales » d'un objet de l'espace, mais aussi à le distinguer du sens d'une « image mentale ».

2.1.2 Les représentations mentales d'objets géométriques 3D

Dans la communauté de recherche, le terme « représentation » est polysémique, large et ambigu.

Une représentation mentale pourrait être décrite comme un stimulus cérébral qui déclenche chez l'individu une référence (cognitive) à l'objet en cause, que cet objet soit (physiquement) en face de lui ou non, ou soit extérieurement « représenté » ou non ; extérieurement représenté par exemple par une photo, un dessin, une reproduction, ou même un symbole ; bref par ce que les sémioticiens appellent le *signifiant* d'un signe. Dans le cas particulier des objets mathématiques, Duval (1993) a nommé et caractérisé ces signes

(combinaison du signifiant et du signifié) comme les *représentations sémiotiques* des concepts mathématiques. Il s'agit donc d'une autre signification du mot « représentation ».

Par exemple, la représentation plane d'un objet de l'espace en est une représentation sémiotique possible. Le développement plan en est une autre, les projections orthogonales d'objets 3D en sont d'autres, et la représentation en perspective cavalière également. Il conviendrait donc d'éclaircir la polysémie du verbe « représenter », et de préciser à chaque fois qu'on l'emploie de quelle « représentation » il s'agit, afin de lever l'ambiguïté.

Dans notre étude, lorsque nous parlons de représentations d'objets 3D, il s'agira de dessins 2D d'objets tridimensionnels tels que :

- représentations d'objets 3D en perspective cavalière ;
- représentations d'objets 3D en perspectives à 1 ou à 2 points de fuite ;
- développements plans (patrons) des polyèdres, de cylindres et de cônes ;
- projections orthogonales d'objets 3D (face, droite, dessus, gauche, dessous, arrière).

Il nous semble qu'un travail particulier doit être mené autour de la représentation en perspective cavalière, et ceci pour plusieurs raisons. D'abord parce qu'elle est utilisée dans tous les manuels des élèves du secondaire. Prétendre qu'il suffit d'apprendre à « lire » cette représentation alors que l'on n'en organise pas sérieusement l'apprentissage, et sans apprendre à « l'écrire » c'est-à-dire à la produire ne nous paraît pas cohérent. En fait, nous discutons ici de la dialectique « décodage-encodage » d'un objet 3D. Il s'agit de la capacité à décoder un dessin en perspective cavalière, c'est-à-dire de comprendre les symboles et la technique de dessin elle-même (ses caractéristiques), ainsi que la capacité à encoder (traitement) des informations spatiales de l'objet 3D pour produire (dessiner) la représentation en perspective cavalière. Ensuite, la représentation en perspective cavalière est la seule qui préserve l'appréhension globale des solides (la perception globale), et qui n'oblige pas une reconstruction mentale à partir de vues éclatées. Elle est donc constitutive de la construction intellectuelle de l'espace, et son intérêt dépasse donc très largement les limites scolaires.

Mais attention ! Les représentations mentales des objets 3D constituent des connaissances déjà relativement sophistiquées, complexes. Elles sont peut-être suffisantes pour maîtriser et bien appliquer les formules de volume, mais sont-elles vraiment nécessaires ? Nous faisons l'hypothèse que oui, du moins en contextes scolaires où les problèmes sont donnés discursivement ou à partir d'un dessin 2D.

Mais l'élève doit aussi être capable d'analyser, de « manipuler dans sa tête » (faire tourner, visualiser à partir de différents points de vue, repositionner dans l'espace, etc.) ces (ses !) images mentales.

Pour cela, il y a un travail, voire un « entraînement » préalable à réaliser et cet entraînement vise le développement de trois habiletés :

- la perception spatiale et la visualisation spatiale (la vision, qui est le « *vu* » de Parzysz, nous y reviendrons), et dans une moindre mesure, le toucher) ;
- les connaissances spatiales (le « *su* » de Parzysz).

Cela nous conduit à faire des distinctions entre ces trois compétences, que nous avons déjà précisées dans notre problématique. Mais avant d'en arriver là, il est important que l'élève différencie ce qu'est une représentation comme dessin, d'une représentation comme figure.

2.1.3 Différences entre figure, dessin et représentation

Dans le domaine de la didactique de la géométrie, il est maintenant usuel de distinguer, voire d'opposer *dessin* et *figure*. En géométrie, une figure existe en effet indépendamment du dessin ou des multiples dessins qui en seront faits, puisque la figure est l'objet et le dessin en est une représentation : la figure est immuable et idéale, le dessin est tributaire des matériaux utilisés, de l'habileté manuelle du dessinateur, mais aussi de ses connaissances, de l'interprétation qu'il donne à ce qu'il doit dessiner, etc.

Une figure est une idéalité, c'est-à-dire une conception de l'esprit ; ses propriétés, de ce fait, sont exactement celles qui sont annoncées : les côtés du parallélogramme-figure sont rigoureusement parallèles, ceux du parallélogramme-dessin ne le sont pas forcément – une

infime différence de direction pourrait en effet les faire se rencontrer au bout d'un certain nombre de kilomètres !

Ainsi, face à la perfection de la figure, l'imperfection du dessin est inévitable, du fait de l'impossibilité de rendre sur papier des points sans dimension ou des droites sans épaisseur ; elle est donc plus ou moins accentuée selon les instruments de dessin ; mais elle est tributaire aussi de l'exécutant — ou de celui qui doit interpréter la représentation qu'il a devant lui, justement comme un dessin ou comme une figure selon le cas —, en particulier de la familiarité qu'il a ou non avec un savoir, familiarité qui s'acquiert avec l'usage et le temps.

La distinction entre dessin, figure et objet géométrique a été et continue d'être au centre de plusieurs travaux de recherche. Par exemple, Arsac propose une distinction entre dessin et figure en opposant « le monde sensible » et « le monde géométrique » :

Nous distinguerons dans la suite le dessin et la figure, désignant par dessin le dessin concrètement tracé sur une feuille de papier (ou dans le sable pour Archimède) et par figure l'objet mathématique dont le dessin n'est qu'une représentation... Ainsi, la figure est un élément du « monde mathématique » et non du monde sensible. (Arsac, 1989, p. 86)

Dans le même sens, Parzysz (1989) réserve le mot « figure » à l'objet géométrique et le mot « dessin » à une représentation graphique de cette figure, autant en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace.

Laborde et Capponi (1994) reprennent cette distinction entre dessin, figure et objet géométrique en se plaçant dans le triangle « référent, signifiant, signifié », emprunté à la sémiotique ou à la linguistique :

En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique (objet d'une théorie géométrique comme celle de la géométrie euclidienne, ou de la géométrie projective). La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un des dessins qui le représente ; le deuxième terme étant pris dans l'univers de tous les dessins possibles du référent. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation

entre un objet géométrique et ses représentations possibles. Dans cette approche, les rapports entre un dessin et son référent construits par un sujet, lecteur ou producteur du dessin, constituent le signifié de la figure géométrique associé pour ce sujet. Ce signifié correspond à ce que Fischbein (1993) appelle *figural concept*. (Op. cit., pp.168-169)

Dans la communauté des chercheurs, tous s'accordent pour dire qu'un dessin géométrique n'est pas une figure, bien que l'expression « tracer une figure » entretienne l'ambiguïté. Pour certains, le dessin devient figure dès qu'il est complété par l'énoncé de ses propriétés. Parzysz (1989) pense que « *la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation* ».

Laborde et Capponi (1994) précisent cette idée en définissant la figure géométrique comme la « *relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles* ». Dans tous les cas, il y a bien, d'une part un objet idéal, dont on peut énoncer des propriétés et sur lequel porte le raisonnement, d'autre part des représentations de cet objet. Il semble que dans l'usage courant, le même mot, par exemple le mot *carré*, serve à désigner à la fois l'objet idéal et les représentations de cet objet.

Dans le présent mémoire de maîtrise, nous allons tenir compte de cette distinction entre figure, dessin et représentation d'un objet 3D. Dans les tâches de résolution de problèmes que nous allons présenter aux élèves, lorsque nous discuterons de figure et de dessin, nous allons faire référence aux mêmes sens que ceux que donne Parzysz, soit qu'une figure concerne l'objet géométrique et qu'un dessin constitue une représentation sur un support matériel (papier, tableau d'une salle de classe, écran d'un ordinateur) de cette figure.

2.2 Développement de trois habiletés en géométrie tridimensionnelle

2.2.1 Développement de la première habileté : la perception spatiale

Piaget, dans ses recherches avec les enfants, avait exposé la nécessité de différencier l'espace perceptif de l'espace représentatif dans le but de comprendre l'ordre dans l'appropriation des propriétés géométriques. Il affirme que la perception, dans le

développement de l'individu, vient avant la représentation : « L'espace perceptif se construit beaucoup plus rapidement que l'espace représentatif » (Piaget & Inhelder, 1948, p. 535).

Quand nous examinons un objet pour en comprendre la structure géométrique, notre regard est porté sur les caractéristiques de sa forme et fait abstraction du matériau avec lequel il est construit. Tel qu'explicité dans notre problématique (section 1.3.1), la perception spatiale peut se produire en général en présence de l'objet 3D physique, mais aussi en présence d'une représentation plane d'un ou de plusieurs objets 3D.

Qui plus est, la perception spatiale constitue une habileté puisqu'elle mobilise des ressources, ici ce sera la capacité de percevoir d'une personne, afin qu'elle puisse traiter efficacement une situation (dans notre cas, ce sera une situation-problème comportant au moins un objet 3D). Toute habileté se développe par l'expérience et exige un entraînement par l'entremise de tâches spécifiques. Toutefois, tel qu'explicité dans notre problématique, parmi les habiletés « perception spatiale », « visualisation spatiale » et « connaissances spatiales », la perception spatiale est celle qui est la plus difficile à travailler directement à travers des tâches.

2.2.2 Développement de la deuxième habileté : la visualisation spatiale

Lorsque nous parlons de « visualisation spatiale », il existe quelques définitions utilisées par les chercheurs. Nous allons présenter celles de Dion, Pallascio et Papillon (1985), de Furtuna, Tanguay et Jonnaert (2012), de Duval (2002), de Bishop (1988) et de Boublil-Ekimova (2010). Ensuite, nous exposerons notre définition.

Pour Dion, Pallascio et Papillon (1985), la visualisation se définit comme suit :

Après avoir observé un objet, sa « visualisation » consiste à pouvoir en mémoriser suffisamment d'images partielles, pour pouvoir reconnaître des objets semblables à celui-ci, c'est-à-dire à isométrie ou homothétie près, parmi un ensemble d'objets de complexité topologique équivalente. (Dion, Pallascio et Papillon, 1985, p. 10)

Ces chercheurs associent la visualisation d'un objet 3D à la capacité de mémoriser des images mentales. Nous spécifions qu'en lien avec notre étude, plusieurs caractéristiques de

l'objet 3D peuvent le rendre plus ou moins difficile à visualiser comme sa non-convexité, son opacité, le nombre de ses arêtes, etc. De plus, le temps d'observation peut interférer dans la rétention d'informations visuelles. Toutefois, nous n'allons pas élaborer sur les processus de rétentions des images mentales, celles-ci constituant à elles seules un domaine d'études spécifique : les neurosciences.

Pour certains chercheurs, la visualisation constitue une composante de la compétence spatiale se référant à « *la capacité de se représenter et de manipuler mentalement un objet 3D* » (Furtuna, Tanguay et Jonnaert, 2012, p. 233).

Duval (2002), quant à lui, distingue la vision de la visualisation en ces termes :

From a psychological point of view, "vision" refers to visual perception and, by extension, to visual imagery. As perception, vision involves two essential cognitive functions.

– The first one consists in giving direct access to any physical object "in person".

That is the reason why visual perception is always taken as a model for the epistemological notion of intuition. Nothing is more convincing than what is seen. In that sense, vision is the opposite of representation, even of the "mental images", because representation is something which stands instead of something else (Peirce). We shall call this function the epistemological function.

– The second one is quite different. Vision consists of apprehending simultaneously several objects or a whole field. In other words, vision seems to give immediately a complete apprehension of any object or situation. In that sense, vision is the opposite of discourse, of deduction... which requires a sequence of focusing acts on a string of statements. We shall call it the synoptic function. (Duval, 2002, p. 320-321)

Notre traduction :

D'un point de vue psychologique, la « vision » fait référence à la perception visuelle et, par extension, à l'imagerie visuelle. Comme la perception, la vision implique deux fonctions cognitives essentielles.

– La première consiste à donner un accès direct à tout objet physique. C'est la raison pour laquelle la perception visuelle est toujours considérée comme un modèle pour la notion épistémologique d'intuition. Rien de plus convaincant que ce qui est vu. En ce sens, la vision est à l'opposé de la représentation, même des « images mentales », parce que la représentation est quelque chose qui se tient à la

place d'autre chose (Peirce). Nous allons appeler cette fonction la fonction épistémologique.

– La seconde est tout à fait différente. La vision consiste à appréhender simultanément plusieurs objets ou tout un champ. En d'autres termes, la vision semble donner immédiatement une complète appréhension de tout objet ou situation. En ce sens, la vision est à l'opposé du discours, de la déduction... qui nécessite une séquence d'actions spécifiquement dédiées à une suite d'affirmations. Nous allons l'appeler la fonction synoptique.

Duval discute plus de vision que de visualisation, en précisant que la vision détient deux fonctions cognitives : la première est de donner un accès direct à un objet 3D concret que nous allons associer dans notre étude à la visualisation externe (directe) tel que discuté dans notre problématique ; la deuxième semble faire référence chez Duval au processus cognitif qui consiste à appréhender globalement et synthétiquement un ensemble d'objets ou même de phénomènes, or dans notre étude ce processus s'appliquerait aux objets 3D, et nous allons alors parler de perception spatiale et non de visualisation (voir problématique, section 1.3.1)

Bishop (1988) définit la visualisation spatiale comme un processus essentiellement dynamique. Il s'agit d'être capable non seulement de se représenter mentalement et visuellement l'image d'un objet, mais aussi d'être capable de lui faire subir des manipulations et des transformations spécifiques. Pour nous, la définition de Bishop est associée à des images dynamiques que nous avons définies antérieurement (voir section 2.1.1). Toutefois, pour nous, la visualisation spatiale ne se limite pas qu'à cet aspect, elle est également associée à d'autres aspects ou plutôt « types d'images » que nous avons identifiés précédemment, soit des images concrètes, des images de modélisation et des images dynamiques.

Boublil-Ekimova (2010) a réalisé une analyse intéressante des compétences et des contenus mathématiques proposés par la réforme pour l'enseignement de la géométrie. Cette chercheuse a répertorié les éléments essentiels au développement de la pensée géométrique en ce qui a trait au concept de visualisation :

- reconnaître les représentations (physiques et géométriques) dans différentes positions (orientation) des figures (perception) ;
- reconnaître les éléments visuels (dans différentes positions-orientations) de la figure et leurs relations (abstraction : congruence, parallélisme, perpendicularité) ;

- repérer la ressemblance, la dissemblance, la congruence, les éléments communs, etc. des figures (comparaison visuelle) ;
- représenter (représentations mentales, physiques ou graphiques) les figures à partir de leurs noms ou de la description de leurs propriétés (imagination spatiale) ou à partir des définitions (caractéristiques, conceptuolexicales et constructives) ;
- reconnaître (évoquer) et représenter les éléments (représentations mentales, physiques ou graphiques) — non décrits et non tracés — nécessaires à la résolution (imagination spatiale). (Boublil-Ekimova, 2010, p. 31)

Bien que l'étude de Boublil-Ekimova soit pertinente, elle ne discute pas spécifiquement de visualisation spatiale en tant que processus de créations d'images mentales. Toutefois, elle discute d'imagination spatiale, en tant que « représentations mentales, physiques ou graphiques » générées par l'individu à partir du nom des figures, ou de la description de leurs propriétés.

Lorsque nous comparons différents individus selon leurs compétences en visualisation, nous trouvons une variation substantielle. Par exemple, les tests effectués par la chercheuse russe Yakimanskaya (1991) confirment que les gens qui possèdent une grande variété d'habiletés avec les transformations mentales, c'est-à-dire l'habilité à imaginer des rotations d'objets 3D et à se positionner mentalement par rapport à des objets 3D, sont capables de raisonnements spatiaux et visuels qui sont bien développés. Le rôle de ces transformations, notamment comment elles se connectent aux compétences spécifiques développées à partir de l'expérience géométrique, pour forger les compétences à résoudre les problèmes géométriques complexes, serait un domaine important à comprendre.

Nous allons maintenant présenter notre position sur le concept de visualisation spatiale. Nous rappelons que nous avons déjà défini la visualisation comme une habileté à développer sous forme de deux catégories : la visualisation externe, c'est-à-dire directe, s'exerçant de manière locale pour repérer les constituants d'un objet 3D physique ou dessiner en 2D ; et la visualisation interne, c'est-à-dire mentale, issue d'un processus de créations d'images mentales.

Tel qu'expliqué dans notre problématique, la visualisation n'est pas synonyme de perception. Elle est de nature plus complexe. Essentiellement, lorsque nous voyons un objet 3D réel ou une de ses représentations (dessin 2D) sur une feuille de papier ou sur un écran

numérique, nous percevons par nos yeux — organes des sens — des parties spécifiques, celles qui sont immédiatement accessibles à la vision, de l'objet 3D. La perception spatiale s'exerce de manière exploratoire par le biais physique de l'œil, de la main et même du corps entier. Ce que nous percevons spatialement ne donne que rarement une vision complète de l'objet 3D ; par exemple, il peut y avoir des parties du solide qui sont cachées, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D (voir problématique, section 1.3.2). Voilà pourquoi la visualisation ne doit pas être réduite à la perception spatiale, à savoir que la visualisation rend visible une bonne partie de ce qui n'est pas accessible à la seule perception spatiale.

Contrairement à la perception spatiale, la visualisation revêt un aspect local avec un début d'analyse et d'interprétation, avec le décodage de l'objet 3D lui-même, et s'il y a lieu, avec le décodage du dessin 2D représentant l'objet 3D.

Pour exemplifier nos propos, nous allons utiliser une figure appelée « cube impossible » illustrée à la figure 2.1. C'est un dessin des arêtes d'un cube en perspective cavalière. Lorsque nous le regardons, nous percevons spatialement la forme globale de la figure et, de manière instantanée, nous affirmerons que cette figure est un cube. Notre visualisation, quant à elle, va se concentrer plus localement sur telle partie de la figure, telle que la manière dont sont dessinées les arêtes du cube et interpréter ce qui rend le dessin ambigu : la figure ne montre pas quelle arête du cube est devant l'autre lorsque deux lignes se croisent dans la représentation, ainsi elles peuvent être interprétées de deux manières différentes. Soit nous visualisons la partie en bas à gauche comme étant en avant, soit nous visualisons la partie arrière comme la face du devant, nous allons alors « voir » un cube formé selon un 2^e point de vue. Mais ces deux points de vue sont incompatibles, alors que la visualisation (locale) de chaque partie isolée montre un objet possible. C'est la juxtaposition des différentes parties qui rend le cube « impossible ». Quand une personne observe le dessin, elle remarquera alternativement chacune des deux interprétations valides.

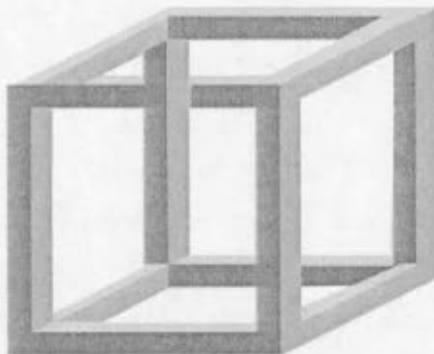


Figure 2.1 Un cube impossible

Einhauser et *al.* (2004) avancent qu'une concentration plus prononcée sur des parties différentes de la figure peut mener à une visualisation « plus stable » du cube.

Voici un autre exemple où se produit la visualisation. En observant attentivement une pyramide régulière droite à base carrée, on imagine mentalement les arêtes, les faces et les sommets, soit de manière simultanée, soit les uns à la suite des autres, soit encore par ensembles, selon le point de vue utilisé. Évidemment, cette exploration est purement visuelle, toutefois si elle est jointe à une manipulation de la pyramide en question, en faisant varier les points de vue sous différents angles, la compréhension de sa structure n'en sera que plus complète. De plus, elle le sera encore davantage si on construit soi-même la pyramide. Notre argumentation confirme les propos exprimés par Pallascio, Papillon et Dion (1985) :

C'est en effet par le contact direct, la manipulation des structures tridimensionnelles, que l'on arrive à saisir les rapports entre les éléments qui constituent leurs organisations. De l'analyse et de la comparaison naît l'anticipation qui va provoquer constamment l'imagination et développer probablement ce qu'on appelle l'intuition de l'espace. (Op. cit., p. 13)

Qui plus est, des recherches sur l'apprentissage ont démontré l'utilité d'avoir recours au visuel, à des dessins, pour faire comprendre divers concepts mathématiques, et pas seulement en géométrie (Eisenberg & Dreyfus, 1991). Encore faut-il que les élèves soient en mesure de comprendre les représentations qu'on leur propose, et que l'on puisse leur enseigner certaines techniques spécifiques leur permettant de développer leurs

représentations spatiales. Et où réaliser cela, si ce n'est au cours de mathématiques, le seul cours obligatoire qui traite formellement de l'espace ?

De tout ce qui a été dit jusqu'à présent, nous pouvons discuter de l'importance des représentations des objets géométriques dans l'espace. La plupart des représentations des objets 3D ressemblent aux objets physiques. Mais lorsque, telles les projections, elles enlèvent une dimension aux objets, elles provoquent des ambiguïtés, des pertes d'information. Il faut donc apprendre à les interpréter. L'apprentissage de la géométrie de l'espace provoque un paradoxe : d'une part on ne peut apprendre cette géométrie sans s'appuyer sur des représentations, et d'autre part il faut connaître assez de géométrie pour interpréter ces représentations, et davantage encore pour en produire. Apprendre à les interpréter, c'est aussi apprendre à les « voir » dans l'espace.

Les représentations des objets géométriques dans l'espace ressemblent aux images visuelles, mais s'en distinguent du fait qu'elles obéissent à des règles précises. Il faut apprendre à les discerner, à les différencier correctement. Les images mentales d'un objet 3D sont brutes, dépourvues de prime abord d'éléments de connaissances alors que les représentations mentales du même objet 3D sont organisées et font intervenir des structurations qui viennent d'éléments de connaissances.

Ces considérations suffisent à montrer que les représentations sont d'une importance pratique et théorique considérable. Non seulement, comme nous l'avons dit, elles sont indispensables pour apprendre la géométrie de l'espace, mais même on exagérerait peu en les proposant comme thème unique de cet apprentissage. Elles sont porteuses des principaux éléments essentiels de cette géométrie.

2.2.3 Développement de la troisième habileté : les connaissances spatiales

Comment définit-on les connaissances spatiales ?

Dans la communauté de recherche, les connaissances spatiales sont caractérisées par quelques définitions, dont celles de Berthelot-Salin. Leur définition va aider à préciser ce que nous entendons par « connaissances spatiales ». Voici les propos de ces chercheurs :

Par connaissances spatiales nous désignons les connaissances qui permettent à un sujet un contrôle convenable de ses relations à l'espace sensible. Ce contrôle se traduit par la possibilité pour lui de :

- Reconnaître, décrire, fabriquer ou transformer des objets ;
- Déplacer, trouver, communiquer la position d'objets ;
- Reconnaître, décrire, construire ou transformer un espace de vie ou de déplacement.

La maîtrise de l'espace est l'objet d'apprentissages bien avant l'entrée dans la scolarité et elle continue de se développer par des voies parallèles tout au long de l'enfance et de l'adolescence, voire de l'âge adulte. Ces apprentissages du sujet s'appuient sur une multiplicité d'interactions diversifiées avec le milieu matériel et humain, sous la forme de rapports effectifs, d'imitation de comportements d'adultes ou d'enfants plus grands, d'échanges oraux avec les adultes à propos de ses actions, de leurs effets, etc. Ces interactions sont d'autant plus efficaces qu'elles sont finalisées et pour certaines d'entre elles, vitales pour le sujet.

Dans notre société, une partie importante des connaissances spatiales est fortement liée au savoir géométrique, ce qui n'est pas la cas, par exemple, dans la société esquimaude. (Berthelot et Salin, 1999-2000, p. 38)

Par exemple, si une personne X veut faire découper une planche de bois qui s'adapte à une étagère qu'elle est en train de construire, il est essentiel qu'elle sache communiquer à une personne Y qui fera le travail de découpage, la forme ainsi que les dimensions de la planche de bois dont elle a besoin. Cette personne va donc mobiliser ses connaissances spatiales. Toutefois, si ces dernières sont mal adaptées à la situation, si par exemple, l'espace qu'elle veut remplir avec sa planche de bois n'est pas parfaitement rectangulaire, mais que la personne X n'a pas pensé à contrôler cette donnée ou encore, qu'elle ne sait pas le faire parce que le rectangle n'est pas dessiné, le message risque d'être inadéquat et de conduire la personne Y au découpage d'une planche de bois qui ne conviendra pas à l'endroit prévu. Ainsi, connaître les propriétés du rectangle constitue un savoir inopérant sur le monde environnant s'il n'est pas accompagné de connaissances plus larges, sur les conditions dans lesquelles ce savoir est fonctionnel.

Dans notre problématique, nous avons discuté de l'étude de Marchand ayant pour thème l'enseignement du sens spatial au secondaire. Elle définit les connaissances spatiales comme suit :

Connaissances spatiales [en gras dans le texte] : processus qui par l'entremise des cinq sens, conduit l'apprenant à contrôler, anticiper et communiquer les

états, les transformations ou les déformations des données (forme, position, orientation) d'objets relatifs à l'espace à 2D ou en 3D. Par exemple, être capable d'anticiper la forme, l'apparence d'un solide d'après son développement relève des connaissances spatiales. (Marchand, 2006, p. 107)

Nous allons maintenant procéder à une définition/caractérisation des connaissances spatiales en nous basant sur les définitions de Berthelot et Salin et de Marchand, ainsi que de notre propre compréhension de la question :

- 1) Être capable de percevoir les découpages des objets géométriques (voir section 2.1.3 – perception spatiale), mais aussi de les organiser dans un début de modèle théorique, un début d'abstraction (début qui va progressivement se développer, s'organiser, se structurer en modèle) plus purement géométrique (au sens d'Euclide) avec les notions de points (comme éléments atomiques), de segments, de droite, de plan, de dimension, d'incidence, de parallélisme, de perpendicularité, d'angle, etc.
- 2) Avoir en tête (images mentales) une banque d'objets géométriques institutionnalisés, standardisés, autant en deux dimensions qu'en trois dimensions (triangles, quadrilatères de différents types, polyèdres tels que prismes, pyramides et cônes, corps ronds tels que les cylindres, les sphères et les boules).
- 3) Être capable de les reconnaître dans des objets physiques concrets ou dans des représentations, de connaître certaines de leurs propriétés (qui se manifestent par exemple au découpage d'un objet 3D), certaines des interrelations qui lient ces propriétés, et de décrire verbalement ces objets et leurs propriétés.
- 4) Être capable d'anticiper des mouvements, des transformations, des déplacements d'objets tridimensionnels.

D'après Parzysz et al. (1988, 1989), le développement des deux compétences « perception spatiale » et « connaissances spatiales » se réalise en interdépendance, c'est-à-dire en s'appuyant l'une sur l'autre. De plus, certains éléments de ces deux compétences sont communs aux deux types, à savoir :

- Décoder une représentation planaire d'un objet 3D, « visualiser » un objet 3D à partir d'une représentation planaire ou même d'une description (représentation discursive, « en mots »)

Parmi les connaissances spatiales, il y a la capacité à produire des représentations à deux dimensions d'objets tridimensionnels :

- ✓ Les projections orthogonales (vues de face, dessus, droite, gauche, arrière, dessous)
- ✓ Les projections centrales (les perspectives à 1 point de fuite ou à 2 points de fuite)
- ✓ Les projections parallèles (la perspective cavalière)
- ✓ Le développement plan des polyèdres et des corps ronds (sauf la boule).

Dans les écoles secondaires du Québec, l'enseignement de la géométrie de l'espace repose sur l'étude des solides standard tels que les polyèdres et les corps ronds. Comme enseignant expérimenté, nous avons fait le constat que cet enseignement ne peut se limiter à de simples manipulations d'objets et il se trouve rapidement confronté au problème de la représentation de ces objets et à la nécessité de les représenter. Ce constat a été à maintes reprises fait par des chercheurs, dont Janvier (1992, 1994, 1997), Parzysz (1989, 1991), Marchand (2009), Pallascio, Talbot, Allaire et Mongeau (1990). Un enseignement de la géométrie dans l'espace ne peut avoir des chances de réussir qu'à condition que soit mis en place dès les premières années du secondaire au moins un procédé de représentation des objets de l'espace, avec tout ce que cela comporte de savoir-faire et d'apprentissage.

Nous faisons donc l'hypothèse qu'une prise de conscience des différences géométriques entre l'objet et sa représentation est indispensable, un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet que s'il a une bonne image mentale de cet objet et aussi, une connaissance adéquate des règles de représentation lui permettant de décoder ce dessin.

2.3 La représentation des objets dans l'espace

La représentation des objets de l'espace s'opère par le passage de l'espace au plan : ce passage entraîne une perte d'information. Un conflit surgit entre ce que l'on sait et ce que

l'on veut représenter par le dessin, ou entre ce que l'on voit et ce que l'on cherche à savoir par la représentation.

Représenter l'espace sur la feuille de papier est un obstacle sur lequel l'humanité va buter jusqu'à la Renaissance. C'est l'obstacle épistémologique typique. Si l'humanité a attendu si longtemps pour disposer d'une théorie de la perspective, c'est qu'on a là une difficulté conceptuelle majeure, à laquelle tout individu sera confronté à un moment de son développement. Et c'est donc de la responsabilité de l'école de permettre aux élèves de la lever.

2.3.1 Dessin en perspective

Il convient de préciser de manière conceptuelle ce que nous entendons par un dessin en perspective dans le contexte de ce mémoire. L'idée mathématique sous-jacente au dessin en perspective se base sur la notion de cône visuelle. Il s'agit d'un cône dont le sommet correspond à l'œil du peintre, supposé unique, ponctuel et immobile, et dont la base correspond au contour visible de l'objet à représenter. Le dessin en perspective sera l'intersection entre ce cône visuel et le plan du dessin. Si, par exemple, nous voulons représenter, sur la surface du plan pictural π , un rectangle $ABCD$ situé sur le sol, de manière à ce qu'il soit observé à partir d'un point P du sol, l'œil du spectateur étant situé à une hauteur p et à une distance d du tableau, soit au point O , nous devons alors tracer la pyramide visuelle $OABCD$, qui coupe le plan pictural π aux points $ABC'D'$. Alors le trapèze $ABC'D'$ est la représentation en perspective du rectangle $ABCD$ (voir figure 2.2).

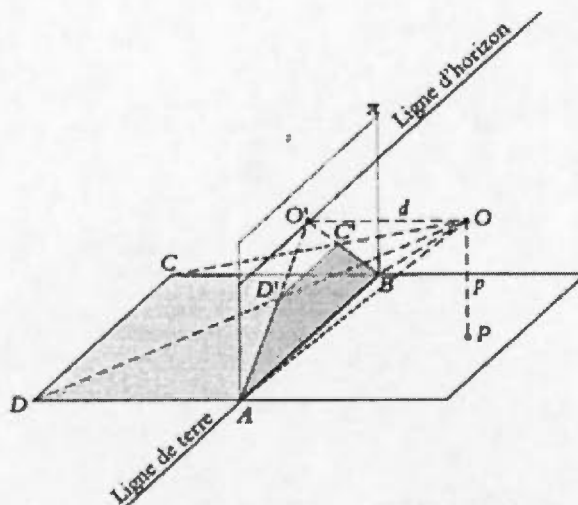


Figure 2.2 Le cône visuel dans un dessin en perspective (Casalderry, 2000, p. 20)

En définitive, la représentation en perspective constitue une projection de centre O sur une portion de plan infini π , plan qui supporte le tableau. Ici, le plan pictural π ou *plan du tableau* est perpendiculaire – bien que ce ne soit pas nécessaire – au *plan du sol* ou *plan géométral*. Ces deux plans se coupent en une ligne dénommée *ligne de terre*. L'œil du spectateur ou *point de vue* O se trouve à une hauteur p par rapport au plan du sol et à une distance d du plan du tableau π , sur lequel il se projette perpendiculairement au point O' dénommé *point de fuite principal*. La ligne parallèle à celle de la terre qui est contenue dans le plan du dessin à la hauteur du point O' correspond à la ligne d'horizon. La représentation dans le plan du tableau d'un point quelconque, disons le point D , est le point D' , point d'intersection entre le plan π et la ligne reliant l'œil O avec le point D . Du point de vue pictural, toujours en se référant à la figure 2.2, le tableau du peintre est le plan vertical π et le trapèze $ABC'D'$ est la représentation picturale de l'objet dessiné $ABCD$.

Nous allons maintenant expliquer les trois différentes perspectives qui nous intéressent en utilisant un solide décomposable formé d'un prisme droit à base carrée surmonté d'une pyramide droite à base carrée (voir exemple 2 section 1.2.2).

Exemple 2, avec la perspective cavalière

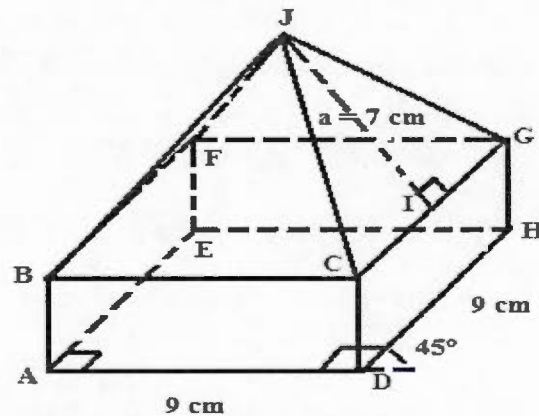


Figure 2.3 Décoder un dessin 2D

Dans le dessin 2D en perspective cavalière du solide décomposable (figure 2.3), nous devons comprendre et décoder les caractéristiques suivantes :

- une face de l'objet se trouve dans le même plan que la feuille sur laquelle l'objet est représenté : dans la figure 2.3, la face de l'objet qui est dans le même plan que la feuille de papier est le rectangle ABCD ;
- les arêtes obliques (appelées « les fuyantes ») sont toutes du même côté de cette face et sont parallèles entre elles, autant dans la représentation en perspective cavalière (il en serait autrement dans la perspective à un ou deux points de fuite) que dans l'objet lui-même : les arêtes de la face rectangulaire ABFE sont parallèles aux arêtes de la face rectangulaire DCGH. De plus, la face ABCD est aussi parallèle à la face qui lui est opposée, soit la face EFGH. Il y a aussi la base AEHD du prisme droit qui est parallèle à sa face opposée, soit la face BFGC. Nous constatons sur le dessin que les angles de profondeur sont d'environ 45° (nous avons dessiné cet angle au sommet D) ;
- la mesure des fuyantes est réduite environ de moitié par rapport à la face située au premier plan ;

- les arêtes du solide qui sont cachées dans la réalité peuvent être représentées par des lignes en pointillé : c'est le cas pour les arêtes AE, BF, FG, EH, FE et JF. Nous avons représenté le segment JI également en pointillé pour montrer que ce n'est pas une arête du solide, mais l'apothème de la pyramide.

Qui plus est, dans le décodage du dessin 2D se pose le problème des faces ABFE et DCGH du prisme qui sont dessinées en « parallélogramme », mais que l'on sait être des rectangles dans la réalité. Il y a présence d'un conflit cognitif entre ce que l'on voit sur le dessin – la perception spatiale, et ce que l'on sait de l'objet tridimensionnel – les connaissances spatiales. Le même conflit entre le « voir » et le « savoir » se produit quand nous regardons les faces triangulaires de la pyramide droite à base carrée : nous percevons que les 4 triangles qui sont « censés » être isocèles ne le sont pas sur le dessin. En effet, le triangle JBC que l'on voit de face est légèrement incliné vers la droite et on voit que les côtés JB et JC de ce triangle ne sont pas isométriques ; de même pour les côtés JC et JG pour le triangle JCG ; et les côtés JF et JG du triangle JGF. Finalement, le triangle JFB est dessiné en triangle « scalène » dont l'angle BFJ est presque égal à 180° !

Exemple 2, avec la perspective à 1 point de fuite

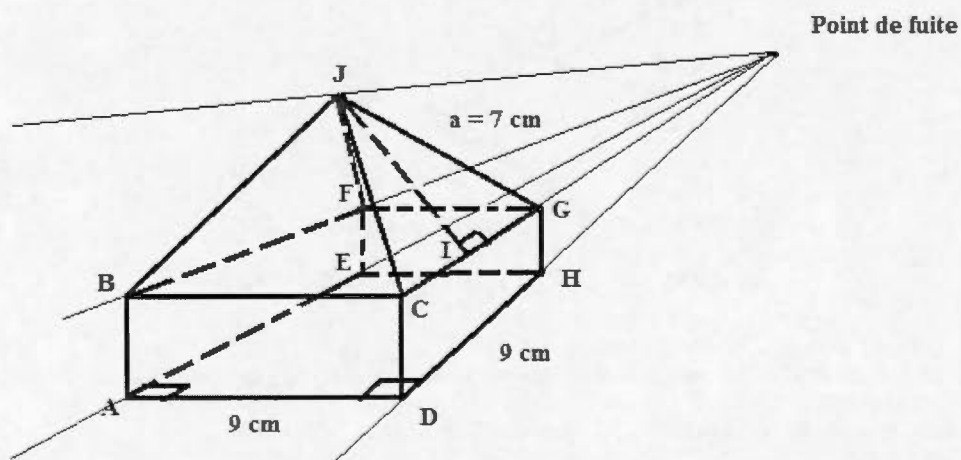


Figure 2.4 Solide décomposable représenté en perspective à 1 point de fuite

Dans le dessin 2D en perspective à 1 point de fuite du solide décomposable (figure 2.4), nous devons comprendre et décoder les caractéristiques suivantes :

- une face de l'objet se trouve dans le même plan que la feuille sur laquelle l'objet est représenté : ici c'est la face rectangulaire ABCD ;
- les fuyantes convergent toutes vers le point de fuite que nous avons placé dans le coin supérieur droite de la feuille – toutefois, nous aurions pu le placer n'importe où. Les fuyantes de la figure 2.4 sont les lignes passant par les arêtes BF, AE, CG, DH, ainsi que la ligne qui joint le sommet J au point de fuite ;
- la mesure des fuyantes est réduite ;
- les arêtes horizontales AD, BC, FG, EH sont parallèles entre elles et les arêtes verticales AB, DC, EF, HG sont parallèles entre elles.

Exemple 2, avec la perspective à 2 points de fuite

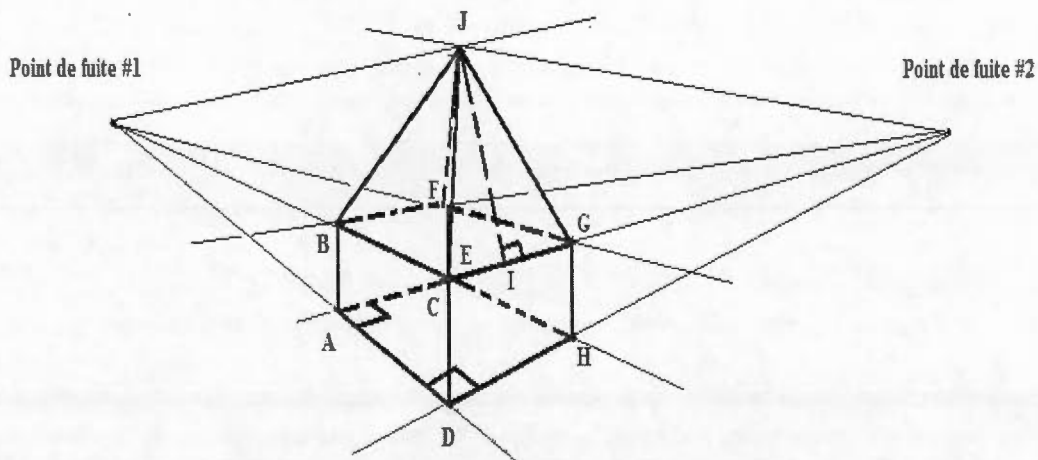


Figure 2.5 Perspective à 2 points de fuite

Dans le dessin 2D en perspective à 2 points de fuite du solide décomposable (figure 2.5), nous devons comprendre et décoder les caractéristiques suivantes :

- une arête verticale de l'objet se trouve dans le même plan que la feuille sur laquelle l'objet est représenté. Dans la figure 2.5, c'est l'arête CD ;

- les fuyantes convergent toutes vers les deux points de fuite pouvant être placés n'importe où – ici le point de fuite #1 est placé en haut à gauche et le point de fuite #2 est situé en haut à droite. De plus, les 2 points de fuite ne sont pas très proches de l'objet 3D afin de dessiner une représentation qui ait du sens, c'est-à-dire qui ne soit pas trop « déformée » ;
- la mesure des fuyantes est réduite : autant celles issues du point de fuite #1 (AD, BC, CH, FG) que celles issues du point de fuite #2 (BF, CG, AC, DH).
- dans une perspective à 2 points de fuite, seules les arêtes verticales sont parallèles entre elles (AB, DC, CF, HG).

2.3.2 Les projections orthogonales dans l'enseignement

Le dessin par projection orthogonale ne présente pas de raccourcissement des distances (effet de perspective, point de fuite). C'est une représentation fidèle de ce que l'on voit tant que la profondeur de champ est faible, ce qui revient à considérer l'œil non pas comme ponctuel, mais comme « plaque photographique » (le plan de projection ou un plan parallèle à la hauteur de l'œil) recevant tous les rayons lumineux qui lui arrivent orthogonalement.

L'avantage de ces représentations est que les éléments parallèles au plan de projection — arêtes, surfaces, angles — sont « en vraie grandeur » : la longueur et l'aire des éléments projetées sont proportionnelles à leur grandeur réelle, l'angle est égal à l'angle réel. Le rapport entre la longueur représentée et la longueur réelle constitue l'échelle du dessin

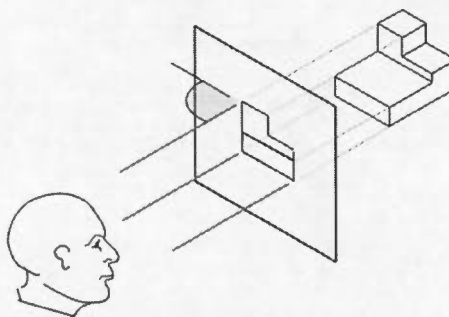


Figure 2.6 Projection orthogonale d'un objet 3D sur un plan

Ce qui distingue également les projections orthogonales, c'est qu'une des faces de l'objet à dessiner est placée parallèlement au plan de projection. L'observateur ne peut voir qu'une face à la fois. C'est pourquoi, on doit dans la plupart des cas dessiner plusieurs projections de l'objet pour le décrire entièrement.

Si l'on regarde du côté de l'enseignement des mathématiques au secondaire, en étudiant les projections orthogonales d'objets 3D (face, dessus, droite, gauche, dessous, arrière), on étudie en même temps certains aspects des propriétés d'incidence, du parallélisme et de l'orthogonalité dans l'espace, puisqu'il faut analyser les relations d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité entre faces, arêtes et sommets dans l'objet pour comprendre comment les éléments de dimension 2, 1 et 0 vont se projeter dans le plan de projection. En ce sens, l'étude des projections orthogonales ouvre un accès aux concepts importants de la géométrie de l'espace.

Pour terminer cette section, nous exposons dans un tableau récapitulatif les différences majeures entre les concepts-clés dont nous avons discuté :

Tableau 2.1 Tableau récapitulatif des concepts-clés

Concept-clés	Signification
Image mentale	<ul style="list-style-type: none"> – Représentation cognitive d'un objet géométrique – Trois types : concrète, de modélisation, dynamique
Représentation mentale	– le « signifiant » d'un signe
Représentations d'objets 3D	– Dessin 2D d'objet 3D selon telle technique (perspectives : cavalière, à 1 ou 2 point(s) de fuite, développement plan, vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière)
Figure	– Objet géométrique théorique
Dessin	– Représentation graphique d'une figure sur un support matériel
Perception spatiale	– Purement synchrétique, globale, avec présence de l'objet physique ou d'une représentation 2D
Visualisation spatiale	<ul style="list-style-type: none"> – Locale (début d'analyse et d'interprétation) – Externe (directe) : « voir-décoder » les constituants de l'objet 3D – Interne (mentale) : <ul style="list-style-type: none"> ▪ visualiser mentalement les constituants d'un solide, ▪ reconstituer mentalement des parties du solide qui

	<p>sont cachées dans la représentation 2D, ou qui ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D,</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ être capable de se représenter les développements plans (patrons) et les projections orthogonales d'un objet 3D.
Connaissances spatiales	<ul style="list-style-type: none"> – Découpage des objets géométriques – Avoir en mémoire une banque d'objets géométriques standardisés, institutionnalisés – Reconnaître les propriétés et interrelations de ces objets 3D – Anticiper des mouvements, des transformations, des déplacements d'objets 3D en se basant sur des connaissances spatiales

Dans la prochaine section, nous allons faire l'analyse du concept de volume dans l'application des formules de volume en lien avec les représentations des objets de l'espace.

2.4 Le concept de volume et des formules de volumes relatifs aux solides usuels

Dans notre étude, il est fondamental de définir quelle conception de volume nous allons adopter. Nous parlerons alors d'une position épistémologique, c'est-à-dire, une conception fondamentale sur la nature de la connaissance scientifique et la manière de la produire. Tel que discuté dans notre chapitre 1, le concept de volume a fait l'objet de quelques études, dont celle de Vergnaud et al.(1983), Janvier (1992, 1994, 1997), Tanguay (2009, 2010) et Anwandter-Cuellar (2013), qui reprend à sa façon l'étude du volume faite par Vergnaud. Nous allons donc exposer les conceptions du volume de ces auteurs et ensuite nous allons préciser quelle est notre position.

2.4.1 La position de l'équipe de Vergnaud (1983)

Vergnaud et ses collaborateurs (1983) ont réalisé une étude sur le concept de volume en montrant le passage d'une conception unidimensionnelle à une conception tridimensionnelle du volume. Les chercheurs ont construit trois séances qui étaient centrées sur le calcul du volume du parallélépipède rectangle, où l'objectif était de permettre aux élèves de découvrir empiriquement une nouvelle manière d'arithmétiser le volume, par le calcul du produit $L \times l \times h$, pour *Longueur fois largeur fois hauteur*.

Lorsque les élèves procèdent au calcul de volume du parallélépipède rectangle, il se produit ce que l'équipe de Vergnaud appelle « un incident critique ». Cela concerne le cube du coin traduisant un conflit entre les conceptions unidimensionnelle et tridimensionnelle du volume. L'incident se produit lorsque les élèves réalisent le décompte des cubes (ou des pavés parallélépipédiques) se situant dans chacune des trois dimensions, de façon à multiplier ensuite par les nombres trouvés. Certains élèves ayant dénombré les cubes dans l'une des dimensions entrevoient qu'il faut en compter un de moins dans chacune des deux autres, « parce qu'on ne peut pas compter deux fois le cube du coin. » Cet incident révèle un conflit entre une conception unidimensionnelle du volume, où l'on ne compte pas deux fois la même unité car un volume est l'addition de petits volumes unités, et la conception tridimensionnelle du volume, dans laquelle le volume est soit le produit de trois longueurs, soit, dans le cas du pavage, le produit des nombres de lignes, de colonnes et de couches, c'est-à-dire de nombres qui sont des scalaires (nombre de fois qu'on peut reporter un pavé dans une colonne, une colonne dans une couche, une couche dans toute la boîte). On pourrait aussi voir ce conflit comme une résultante particulière de la difficulté des élèves à passer de raisonnements additifs à des raisonnements multiplicatifs.

Dans le contexte de l'enseignement actuel, que ce soit en France ou au Québec, cet incident décrit par Vergnaud pourrait se reproduire dans des classes de cinquième (France) et de 6^e année primaire – 1^{re} année du secondaire (Québec), parce que les élèves y apprennent à estimer et à mesurer le volume avec des objets 3D physiques en utilisant entre autres des « petits cubes ». Il s'agit de compter le nombre de « petits » cubes dont l'arête mesure 1 cm – donc dont le volume est de 1 cm^3 – que l'on peut placer (soit physiquement en les manipulant, soit en utilisant des dessins 2D) dans ces objets 3D, physiques ou dessinés. Ainsi, le comptage de ces « petits » cubes peut s'effectuer plus ou moins systématiquement, il suffit juste de ne pas oublier de cubes dans le décompte. Celui-ci est essentiellement additif puisqu'il s'agit d'additionner tous les cubes un à un ou par groupes, si le décompte se fait selon un découpage par tranches. Il relève de ce que Vergnaud appelle une conception unidimensionnelle du volume. Tandis que si les élèves procèdent en multipliant les dimensions du prisme droit entre elles, soit le nombre de petits cubes de 1 cm^3 que l'on peut disposer dans le sens de la longueur en multipliant par les deux autres dimensions (largeur et hauteur), apparaît alors la conception tridimensionnelle du volume, qui se traduit par un

décompte multiplicatif. C'est alors que peut se produire le problème du cube du coin, quand certains élèves qui ont gardé une conception unidimensionnelle du volume pensent qu'il faut en compter un de moins dans chacune des deux autres dimensions « parce qu'on ne peut pas compter deux fois le cube du coin ». Pour ce qui est de notre étude, il s'agira de voir si dans les tâches que nous allons proposer aux élèves et dans les solutions qui en résulteront, certaines erreurs ne peuvent-elles pas être analysées comme des conséquences d'une conception unidimensionnelle (ou additive) du volume.

2.4.2 La position de Janvier (1992, 1994, 1997) et de Tanguay (2010)

Comme nous l'avons mentionné, et en accord avec Janvier (1994), il est crucial de donner un sens « spatial » au concept de volume. De plus, il faut tenir compte des difficultés qui sont bien documentées par des chercheurs. Les quatre difficultés majeures qui reviennent le plus souvent selon la communauté de recherche (Vergnaud et al., 1983 ; Janvier, 1994, 1997 ; Tanguay, 2010) sont les suivantes : 1) la confusion aire latérale – volume ; 2) l'influence des mesures de longueur sur l'estimation d'un volume ; 3) la confusion entre contenant et contenu ; 4) la confusion entre le dénombrement additif et le dénombrement multiplicatif, avec des erreurs analogues à celle du « cube du coin », dont nous venons de parler. Les trois premières difficultés seront abordées selon les positions de Janvier, puis de Tanguay. La quatrième difficulté vient d'être décrite.

1) Confusion aire latérale – volume

Des expérimentations auprès d'élèves du secondaire, relatées par Janvier (1992, 1994), ont mis au jour la confusion entre l'aire latérale et le volume. La majorité des élèves à qui ces expérimentations ont été soumises pense que des solides ayant la même aire latérale possèdent le même volume. Cela ne signifie pas que ces élèves prennent l'aire latérale du solide pour son volume et vice-versa. C'est plutôt qu'ils entremêlent les deux notions et pensent qu'une aire latérale plus grande implique un volume plus grand. Cette confusion aire latérale – volume ne se manifeste vraisemblablement pas quand il n'y a qu'un seul solide en jeu, elle se produit dans des contextes où il y a plusieurs solides à comparer.

Par conséquent, il est important d'amener les élèves à se méfier des apparences lorsqu'ils ont à comparer deux solides. Les élèves doivent bien comprendre que le volume et l'aire latérale sont deux notions indépendantes à ne pas confondre (voir figure 2.7).

On demande aux étudiants de comparer le volume de deux cylindres construits devant eux avec des feuilles de dimension standard. Un cylindre est construit en enroulant la feuille dans le sens de la longueur, l'autre est formé en l'enroulant dans le sens de la largeur. La grande majorité des élèves estiment que les volumes de chaque cylindre seront identiques. Ils suivent une loi implicite selon laquelle deux solides ayant même aire latérale ont même volume. (Janvier, 1997, p. 34)

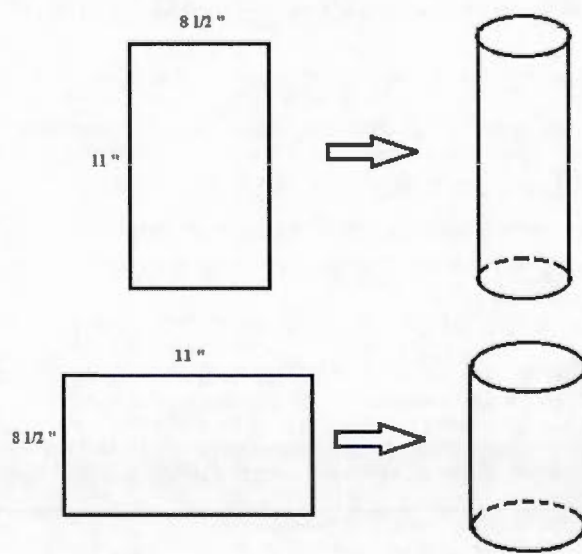


Figure 2.7 Expérimentation de Janvier

Ainsi, l'expérience de Janvier a montré que lors d'une tâche de comparaison de volumes, les élèves peuvent céder devant des « interférences » issues de l'aire des objets 3D à comparer tout comme de leur longueur. Pour l'auteur, « il s'agit bien là d'une interférence qui opère localement dans un acte de pensée ; les grandeurs les plus familières s'imposant au détriment de celle en construction » (Janvier, 1997, p. 33).

2) Influence des mesures de longueur sur l'estimation d'un solide

Plusieurs élèves ont de la difficulté à bien comparer le volume de solides usuels dont les dimensions linéaires sont différentes. Dans son étude, Janvier (1992, 1994, 1997) a mené une expérimentation incitant les élèves à affirmer que deux solides ayant des dimensions linéaires très différentes n'ont pas le même volume :

Notons au passage une autre difficulté : la comparaison entre les volumes de divers solides est souvent gênée par une influence démesurée de leurs dimensions linéaires. Imaginons ainsi une brique faite de plusieurs pièces de « Lego » et le même nombre de pièces utilisées pour produire un bâton. Lorsque les deux solides sont présentés aux élèves, la longueur du bâton incite plusieurs à fixer un volume plus grand au bâton plutôt qu'à la brique. Ici, le raisonnement prédominant qui permet de contourner la difficulté est la décomposition du bâton en petites parties à partir desquelles on reconstruit mentalement (ou sur l'objet) la brique initiale. La capacité à décomposer et à recomposer des objets spatiaux nous apparaît donc comme une habileté spatiale centrale. (Janvier, 1992, p. 67)

3) Confusion entre contenant et contenu

Voici des exemples de questions qu'il s'avère nécessaire d'aborder avec les élèves du secondaire pour clarifier la notion de volume :

Qu'entend-on par volume? Est-ce le solide lui-même ? Est-ce l'intérieur du solide (capacité) ? Est-ce l'espace occupé par le solide ? Le volume est-il un espace vide (l'espace résiduel) ? Le langage est ambigu : les solides qui sont aussi des contenants (des tasses, par exemple) compliquent la distinction entre solides et volumes, et ces solides contiennent un volume et ont un volume propre, la portion de l'espace que leur matière occupe. On note cette confusion chez les élèves : la plupart ont en tête la capacité d'un contenant lorsque l'on parle de son volume. (Janvier, 1994, p. 14)

Tanguay (2010) a repris cette difficulté dans son étude : la confusion contenant-contenu, espace occupé-capacité.

Serait victime de cette confusion l'élève qui, pour mesurer la capacité d'une tasse, mesurerait la quantité de liquide déplacé en immergeant complètement la tasse dans un récipient gradué. Une autre manifestation de cette confusion consiste à refuser d'associer un volume à une portion d'espace vide. (Tanguay, 2010, p. 8)

4) Confusion entre le dénombrement additif et le dénombrement multiplicatif, avec des erreurs analogues à celle du « cube du coin »

Cette difficulté, dans le passage d'une conception unidimensionnelle du volume à une conception tridimensionnelle, a été discutée à la section précédente.

Un autre obstacle didactique rencontré sur la route de l'apprentissage par les élèves est issu d'une conception dominante des enseignants, ayant trait à la nature ainsi qu'au rôle des formules. Pour la majorité des enseignants, le volume et les aires constituent des thèmes faciles à enseigner. Pour eux, il suffit tout simplement de bien montrer comment fonctionnent certaines formules qu'auparavant, on obligeait à mémoriser et que de nos jours, on remet aux élèves en début d'année scolaire et qu'on redonne pour les examens. Janvier ajoute que :

D'autant plus que cette conception [des enseignants] vient renforcer l'apprentissage empirique que les élèves ont subi à propos des aires et des volumes dans l'enseignement primaire. À ce niveau les formules sont données et vérifiées dans un nombre fini de cas, à l'aide de tableaux de nombres, d'où le caractère empirique qu'il assigne à la démarche. Tout se passe comme si chaque formule avait donné lieu à une révélation (divine !), mais vérifiable et non pas comme si elle pouvait résulter d'un examen systématique et rationnel des objets-phénomènes. (Janvier, 1997, p. 33)

La solution que propose Janvier est d'utiliser une « pédagogie différente », où il est impératif de « contrer un recours irréflecti aux formules et changer [la] conception de la notion de formule implicitement imposée par une tradition pédagogique qu'il faut rejeter » (Janvier, 1997, p. 33).

Le volume comme mesure

Dans l'enseignement de la géométrie de l'espace, les enseignants doivent amener progressivement les élèves à bien comprendre que le volume constitue une grandeur ou une mesure associée à un objet tridimensionnel (Janvier, 1994).

Le volume considéré comme un nombre est le résultat d'une mesure. Il est dans un premier temps associé à une portion solide de l'espace. Ainsi, plusieurs élèves refuseront de relier un volume à une portion d'espace vide. Ces élèves croient que seulement les solides pleins possèdent un volume. Qui plus est, le fait que le volume constitue une mesure, un nombre,

conduit parfois à une autre difficulté : seul le solide dont on connaît les dimensions mesurées possède un volume calculable car sinon, on ne peut rien calculer.

2.4.3 La position de Tanguay (2009, 2010)

Tanguay (2009) traite de l'enseignement du concept de volume avec des élèves du secondaire. Il précise que pour construire une séquence d'enseignement opérante, il est nécessaire d'identifier les difficultés vécues par les élèves envers ce concept. Il reprend une des recherches de Janvier (1994) en y ajoutant des arguments plus détaillés, que nous avons déjà discutés dans notre problématique.

Nous précisons que dans le chapitre du mémoire portant sur l'expérimentation et l'analyse des résultats, nous allons retrouver plusieurs de ces difficultés énoncées par Tanguay. Nous allons nous servir de ces difficultés pour construire une grille d'analyse liée spécifiquement aux formules de volume.

Ce dernier reprend en les synthétisant les démarches proposées par Janvier, qui aident à minimiser les différentes difficultés face à la compréhension du volume :

- Voir la formule comme une systématisation du dénombrement des unités-cubes dans le solide, une manière d'organiser ce dénombrement.
- S'appuyer sur des décompositions spatiales (visualisation du découpage en tranches dans le cas des prismes droits) et des reconstructions spatiales (d'un autre solide à partir du solide initial, dans le cas des pyramides, de la sphère, ...) ; bref, sur des actions, intériorisées ou non.
- Éviter le recours trop hâtif aux automatismes de calcul et au mesurage.
- Éviter ou retarder le recours au symbolisme, insister sur la verbalisation (qui favorise en général le raisonnement au détriment des automatismes).
- Recourir à des unités non conventionnelles. Retarder l'introduction aux unités standard (toujours dans le but de retarder les automatismes de calcul, de favoriser la décomposition mentale du solide). Favoriser des activités de comparaison entre solides, retarder le « numérisme » (recours plus ou moins systématique aux nombres).

- Idée de « construire » les formules, de les déduire les unes des autres, en allant des plus simples aux plus complexes, et en élargissant sans cesse les classes de solides auxquelles elles s'appliquent.
- Un des choix de Janvier : l'introduction au Principe de Cavalieri, qui est mentionné, mais pas spécifiquement prescrit par le programme du MELS. Outre l'intérêt intrinsèque du principe, celui-ci permet de donner des justifications autrement inaccessibles pour les formules de volume de la pyramide, des prismes obliques, de certains solides torsadés... (Tanguay, 2009, p. 10)

Pour terminer cette section, nous allons nous servir des études de Janvier (1992, 1994, 1997), Tanguay (2009, 2010) et de Vergnaud et al. (1983) pour définir ce que nous entendons par le concept de volume.

- 1) D'abord, il est crucial de donner un sens « spatial » au volume et d'essayer de limiter les effets nuisibles des automatismes pour les calculs exigés.
- 2) Le volume a une signification en mathématiques :
 - le volume d'un solide constitue une grandeur associée à un objet tridimensionnel. La grandeur qu'est le volume se mesure en unités-cubes, qui sont des cubes dont l'arête a pour longueur une unité. Quand les unités-cubes sont celles du système métrique, chaque unité est mille fois plus grande que celle qui la suit, et mille fois plus petite que celle qui la précède.
 - quand on a affaire à un contenant, le volume de la portion d'espace vide contenue dans ce contenant est appelé la *capacité* du contenant. Tant les unités de volume que les unités de capacité permettent de mesurer la « grandeur » d'un espace tridimensionnel, c'est-à-dire la place qu'il occupe. Il est possible de transformer les unités de volume en unités de capacité et vice versa d'après l'équivalence suivante : $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre}$, et on déduit de cette équivalence que $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ et que $1 \text{ m}^3 = 1 \text{ kl}$.

2.5 Assises théoriques et recension des écrits

Dans cette section, nous allons présenter notre cadre théorique servant d'assise à la formulation du problème de recherche et qui établira la manière dont notre étude sera conduite. Ce cadre constitue une explication des relations entre les concepts-clés de notre recherche. Nous allons utiliser le modèle de Parzysz (1988) du conflit cognitif « *vu-su* » dans les représentations des objets géométriques 3D.

Bien entendu, ce cadre servira d'outil pour tenter de répondre à nos questions de recherche à partir d'analyse faite sur les résultats d'une expérimentation :

- 1) Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volumes de solides usuels ?
- 2) Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?
- 3) Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

2.5.1 Le conflit cognitif « *vu-su* » dans les représentations des objets 3D

La représentation des objets géométriques 3D, par des dessins sur papier, se réalise au moyen d'une ou de plusieurs projections (voir section 2.3) ou encore au moyen des perspectives, cavalière, ou encore à un ou deux points de fuite. Dans chacune de ces représentations, il y a forcément perte d'information. Par conséquent, il y a nécessité d'utiliser des codes pour la lecture et l'écriture de ces représentations, comme l'exprime Bkouche :

Une situation spatiale apparaît ainsi à travers une représentation qui la transforme en figure plane, ceci nécessite l'explicitation d'un code, code

d'écriture et code de lecture... Dans ces conditions, l'appréhension de la situation spatiale à travers la médiation de la représentation plane ne s'appuie pas sur l'évidence comme c'est le cas en géométrie plane, on ne peut plus raisonner sur une figure qui est déjà distincte de la réalité qu'elle est censée représenter, ceci nécessite donc la mise au point de méthodes de raisonnement plus complexes... (Bkouche, 1983, p. 13)

Le chercheur français Parzysz (1988, 1989) a discuté des problèmes des représentations planes des objets dans l'espace dans l'enseignement de la géométrie. Dans une de ses recherches, il a fait ressortir les difficultés des élèves du secondaire en ce qui concerne l'encodage et le décodage des dessins et a montré la « tendance inconsciente » des élèves à transférer les propriétés géométriques d'un objet 3D à sa représentation en 2D. Plus spécifiquement, il a exposé la façon dont les élèves relient les objets géométriques 3D à leurs représentations graphiques (dessins en 2D).

Dans son étude de 1988, Parzysz fait trois affirmations :

- (1) There exists a dialectic between the acquisition (or reinforcement) of knowledge in space geometry, and the mastery of 3D representations.
- (2) It is compulsory to pass through a phase of using a 3D representation (model), even at high school level. We believe it necessary – for various reasons – for the pupils to learn to do without that kind of representation, but that can be done only after some time, when the mental images are truly set up.
- (3) There is a necessity of making the rules for drawing spaces figures explicit. This type of representation is not the concern of more or less hazy conventions, but of projective geometrical properties. (Thus, there is a real opportunity for having the dialectic mentioned above in (1) working...) (Parzysz, 1988, p. 79)

Parzysz a établi les relations entre une figure et ses différentes représentations, que ce soit en géométrie plane ou en géométrie tridimensionnelle. La figure 2.8 schématise ces relations, où trois niveaux de représentation sont distingués :

– le *niveau 0* qui constitue la figure elle-même, c'est-à-dire l'objet géométrique.

–le *niveau 1* qu'il nomme « *représentation fidèle* » (notre traduction de *close representation*) où la représentation « ressemble » à la figure géométrique : même dimension, en dehors du passage de l'abstrait au concret.

–le *niveau 2* qu'il nomme « *représentation éloignée* » (notre traduction de *distant representation*) où la dimension de la représentation est strictement inférieure à celle de la figure.

Dans les niveaux 1 et 2, la représentation peut être en 2D (dessin), si la figure appartient à la géométrie plane, en 2D ou en 3D (modèle) si elle appartient à la géométrie de l'espace.

		Géométrie	
		2D	3D
	Niveau 0	figure	
<i>Représentation fidèle</i>	Niveau 1	dessin	modèle
<i>Représentation éloignée</i>	Niveau 2		dessin



 Perte d'information

Figure 2.8 Relations entre une figure et ses modes de représentations (Parzysz, 1988, p. 80)

Parzysz indique qu'il y a nécessairement une « *perte d'information* » lors du passage d'un niveau donné à un niveau supérieur, et que cette perte d'information peut avoir différentes causes :

Niveau 0 → *niveau 1* : c'est le passage de la figure (objet géométrique) au dessin 2D ou 3D. Tout ne peut pas être indiqué dans une représentation 2D d'un objet 3D. En outre, certaines propriétés de la représentation n'apparaissent que grâce à une forme d'interprétation du lecteur, ce que Parzysz nomme « restitution du sens » (notre traduction de *restitution of the meaning*). En fait, une telle « restitution » ne pourrait avoir lieu sans des conventions partagées entre l'auteur de la représentation (l'émetteur) et le lecteur (le récepteur), et cela n'est possible que si les deux possèdent une culture géométrique commune. Ces conventions partagées concernent en premier lieu la nature des objets représentés, qui appartiennent à un

nombre restreint de types, constituant, pour ainsi dire, une référence « stockée » d'archétypes (point, droite, triangle, cercle, plan, pyramide, cylindre, etc.); toute représentation peut alors être liée à un « assemblage » de ces archétypes. Ceci est particulièrement évident avec les images créées par ordinateur, où les droites et les cercles sont pixellisés et donc, ne sont que suggérés par la représentation donnée à l'écran. Et cependant, dans la grande majorité des cas, l'objet géométrique est correctement identifié.

D'autre part, certaines figures ne sont pas représentables, parce qu'elles sont illimitées : donc pas de réalisation concrète pouvant en donner un compte rendu exact. La représentation « impossible » de ces figures est traditionnellement remplacée par une partie limitée conventionnelle (segment de ligne droite, parallélogramme pour représenter un plan de l'espace, pointillés pour symboliser des prolongements infinis, etc.)

Thus, even, at level 1, close to the original, the representation appears insufficient by nature, like a metaphor in a way, and the necessary interpretation made by the receiver to give it a meaning might well be improper. Of course, the weight of tradition helps to lessen such a risk but, on the one hand it is sometimes insufficient, and on the other hand – we shall come back to that point later on – it can be a source of the other types of problems. (Parzysz, 1988, p. 81)

Niveau 0 → niveau 2. Ce passage concerne les dessins (objets géométriques) représentant des figures de l'espace (3D). La relation entre un objet géométrique et sa représentation est encore « plus floue » qu'en géométrie plane, et il devient souvent difficile de deviner, à partir du dessin, les propriétés de la figure 3D elle-même. Voici un exemple donné par Parzysz :

For instance, in Drawing 1A (level 1), representing a square and its diagonals, the perpendicularity of these can be easily be conjectured; on the contrary, in Drawing 1B (level 2), representing a regular pyramid with a square base, the diagonals of that base and the perpendicular height, it is much less evident to imagine that the height is perpendicular to the diagonals : one must first bring to mind a close representation, of the « model » type (and even make it), if one wants to get to it, unless one is familiar enough with the properties of 3D objects.(Parzysz, 1988, p. 81)

Notre traduction :

Dans le Dessin 1A (niveau 1), représentant un carré et ses diagonales, la relation de perpendicularité peut facilement être conjecturée. Au contraire, dans le dessin

1B (niveau 2) représentant une pyramide régulière à base carrée, les diagonales de cette base et la hauteur perpendiculaire à la base, il est moins évident d'imaginer que la hauteur est perpendiculaire aux diagonales : on doit d'abord avoir à l'esprit une représentation fidèle du « modèle » (et même s'en faire une) si l'on veut accéder aux propriétés, à moins d'être assez familier avec les propriétés de l'objet 3D.

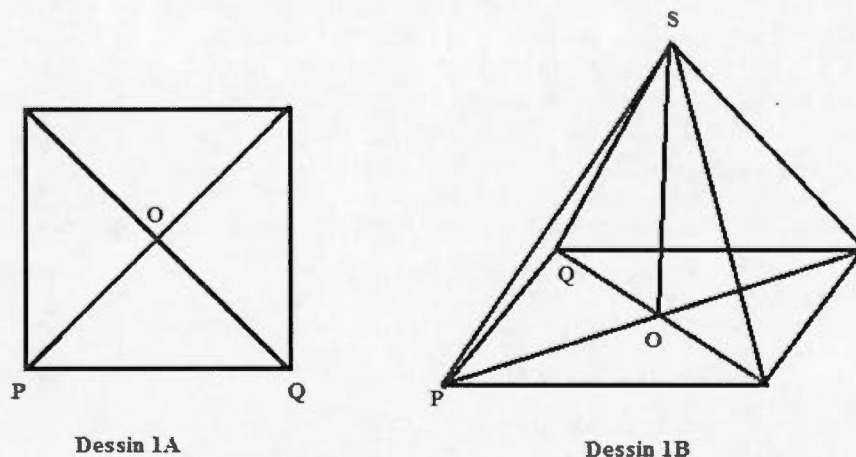


Figure 2.9 Dessins 1A et 1B (images reprises de Parzysz, 1988)

Dans la figure 2.9, il y a autre chose à relever, et Parzysz la relève dans un de ses textes ayant trait à l'isomorphisme (1989). Il y a isomorphisme entre la représentation et l'objet plan dans le dessin 1A, l'angle POQ mesure vraiment 90° . Alors que dans le dessin 2B, ce n'est pas le cas.

In conclusion : with close representations, and much more so with distant representations, it is generally not possible to do without, if not the original text, at least a caption accompanying the representation, and making up for the loss of information inherent in any representation : the drawing, the model cannot substitute itself for the figure. (Parzysz, 1988, p. 82)

En ce qui concerne les *représentations éloignées*, Parzysz indique que deux problèmes surviennent, comme cela arrive souvent quand la communication entre en jeu : le problème du codage du message, et celui du décodage.

Le problème du décodage se complexifie par une difficulté supplémentaire : c'est le danger que le lecteur puisse confondre la figure 3D représentée (dessiné) avec une figure 2D ayant la même représentation. Voici un exemple issue de l'étude de Parzysz :

This difficulty is not an imaginary one, and we have met it, even with sixth graders, for example in an exercise asking, from a drawing in parallel perspective representing a solid accompanied by a caption identifying it, to tell the nature of one particular side. This side, a square, was represented by a parallelogram. And, although all the pupils knew that it was indeed a square, and although the teacher several times laid stress on recalling that it was a matter of a quadrilateral in space, and not of its drawing, however several pupils gave the answer « parallelogram ». (Parzysz, 1988, p. 82)

Les problèmes de codage d'une figure géométrique 3D en un seul dessin ont leur origine dans l'impossibilité de donner une *représentation fidèle* de la figure, et dans l'obligation de se rabattre sur une *représentation éloignée*, dans laquelle il y a une perte d'information. L'émetteur est effectivement confronté à un dilemme insoluble, en raison du fait que ce que l'on sait d'un objet 3D entre en conflit avec ce que l'on voit de lui. (Parzysz, 1988, p. 83-84.)

Cette « coexistence » du *su* et du *vu* dans une même représentation n'est pas toujours « pacifique » et peut donner lieu à des conflits, comme par exemple sur le lit de la figure 2.10, dessin réalisé à partir d'une partie de la miniature de la mort de Moïse figurant dans la Bible de Naples (XIV^e siècle). Ce lit est représenté en perspective, avec des fuyantes (le *vu*) ; les bandes parallèles qui ornent la couverture sont représentées en parallèles (le *su*). Le conflit apparaît en bas du dessin à droite, où la dernière bande décorative est oblique par rapport au pied du lit, au lieu de lui être parallèle comme on s'y attendrait.



Figure 2.10 Coexistence du *vu* et du *su*

Le conflit *vu-su* peut s'appliquer à notre recherche. La nécessité de gérer au mieux le conflit « *vu* » versus « *su* » a conduit progressivement les utilisateurs de la géométrie à faire des choix qui ont progressivement constitué la « tradition » dans les dessins des figures et des objets 3D. Cette tradition a un côté positif : elle nous permet de reconnaître, à première vue, l'objet en question. Mais elle a aussi un côté négatif, c'est-à-dire que les élèves, habitués à dessiner une figure donnée dans une position donnée (par exemple le cube), perdent de vue le « pourquoi » de cette représentation précise et la possibilité d'avoir d'autres idées, c'est-à-dire d'autres façons de représenter la figure. Parzysz donne l'exemple du tétraèdre régulier, traditionnellement représenté dans la perspective cavalière avec une face horizontale alors qu'il serait parfois plus utile de l'inscrire dans un cube tel qu'illustré à la figure 2.11.

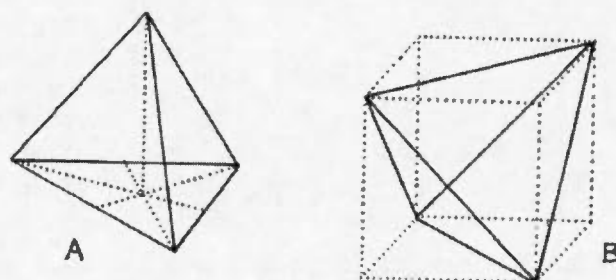


Figure 2.11 Deux représentations d'un tétraèdre (Parzysz, 1988, p. 90)

Nous évaluons que tout cela montre clairement la nécessité de travailler, au niveau de l'école secondaire, sur les principes mêmes de la représentation plane des objets de l'espace, à savoir une ou deux parmi les suivantes : perspective cavalière, perspectives à 1 ou à 2 points de fuite, projections orthogonales.

Dans ce qui suit, nous allons synthétiser le conflit « *vu-su* » par les propos mêmes de Parzysz, ainsi que par la figure 2.12, que nous avons conçue pour notre cadre théorique :

De façon générale, lorsqu'il s'agit de représenter un objet tridimensionnel, et si l'on veut qu'il soit facilement identifié, on le dessine selon un point de vue habituel (le « *vu* »), c'est-à-dire, le plus souvent, à peu près de face (mais pas complètement) et légèrement de dessus. Mais ceci ne permet pas de conserver la totalité des propriétés spatiales de l'objet (le « *su* »), car certaines parties sont cachées et d'autres déformées par la perspective. Il est donc nécessaire de « négocier » — ce qui se fait le plus souvent de façon non réfléchie — la

coexistence du vu et du su, afin d'arriver à une représentation synthétique de l'objet. (Parzysz, 2006, p. 138)

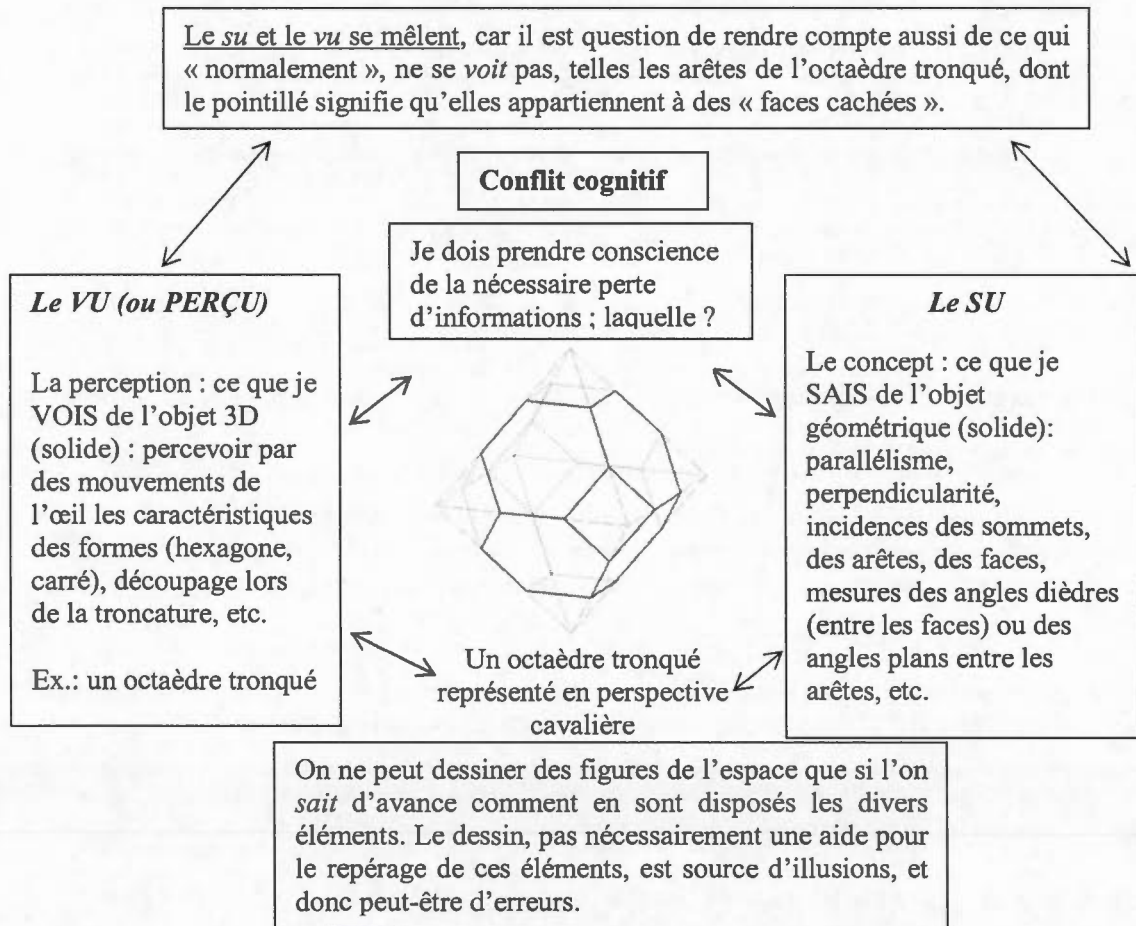


Figure 2.12 Le conflit *vu-su* (notre adaptation)

Nous comptons utiliser ce conflit voir-savoir dans notre recherche aux fins des analyses. Ainsi dans une tâche de résolution de problème exigeant un calcul du volume d'un solide décomposable où il y a présence de dessins 2D d'objets 3D, l'élève doit procéder au bon décodage d'informations clés dans les dessins 2D en question pour poursuivre sa démarche de raisonnement.

De plus, si l'on demande à l'élève, dans la même tâche de résolution de problème, de produire des représentations planes d'objets 3D qui ont subi des transformations comme par

exemple, une troncature ou un assemblage d'objets 3D pour former un nouvel objet 3D, alors le conflit cognitif « vu/su » s'opère ainsi : on ne peut dessiner des figures de l'espace que si l'on sait d'avance comment en sont disposés les divers constituants. Les représentations planes ne facilitent pas nécessairement le repérage de ces éléments et peut être source d'illusions, peut donner lieu à des interprétations (des décodages) erronées. L'élève doit prendre conscience de la nécessaire perte d'information dans la représentation plane d'un objet 3D, et l'enseignement doit pouvoir lui permettre d'identifier et comprendre quelle information est perdue.

Dans le prochain chapitre du mémoire, nous allons décrire notre méthodologie de recherche. Nous allons décrire la construction des activités, plus spécifiquement les trois tâches de résolution de problème, leur organisation afin de montrer que les résolutions écrites obtenues à partir de ces tâches vont nous permettre d'identifier des éléments de réponse à nos questions de recherche.

CHAPITRE III

MÉTHODOLOGIE

Ce chapitre du mémoire est consacré à la méthodologie de la recherche. Dans un premier temps, nous allons préciser le type de recherche s'intégrant à notre problématique ainsi qu'à notre cadre théorique. Dans un deuxième temps, il sera question de notre stratégie de recherche, c'est-à-dire le processus d'une recherche qualitative/interprétative comportant l'échantillonnage et la collecte de données. Dans un troisième temps, nous présenterons de manière détaillée notre outil pour recueillir les données : les trois tâches de résolution de problème. Finalement, nous présenterons l'analyse *a priori* des tâches (Dreyfus & Kidron, 2010) : soit la solution avec l'identification des connaissances spatiales nécessaires ainsi que l'anticipation des difficultés et des erreurs face à la résolution de ces trois tâches.

3.1 Type de recherche dans la cadre de notre étude

Notre étude constitue une recherche qualitative/interprétative au sens de Karsenti et Savoie-Zajc (2004).

La méthodologie que nous allons utiliser est de nature qualitative s'inscrivant dans une épistémologie spécifique que l'on nomme « interprétative ». Notre positionnement quant à la vision de la réalité est que celle-ci est construite par les individus qui participent à une situation ; elle est globale puisque c'est la dynamique du phénomène étudié (les connaissances spatiales en lien avec la compréhension du volume) que l'on veut arriver à élucider.

En ce qui concerne la nature du savoir « mathématique », nous adoptons une position épistémologique interprétative. Nous concevons que le savoir « mathématique » produit est intimement lié aux contextes à l'intérieur desquels il a été produit. Le savoir est considéré

comme transférable à d'autres contextes que celui de la recherche. Notre vision de la finalité de la recherche est de comprendre la dynamique du phénomène étudié (la perception et visualisation spatiale, les connaissances spatiales et la compréhension du volume) grâce à l'accès privilégié en tant que chercheur à l'expérience de l'autre, c'est-à-dire, celle des élèves.

3.2 Démarche d'une recherche qualitative/interprétative

Dans ce type de recherche, le chercheur débute par une question de recherche qu'il formule de manière large et qui va se préciser au cours du processus.

3.2.1 La collecte de données

Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi d'avoir recours au matériel écrit, parce que la complexité des questions à traiter par les élèves rend inopérant un traitement strictement oral. De plus, le matériel écrit facilite très concrètement la collecte et l'analyse des données. Lorsque nous parlons de matériel écrit, nous distinguons le questionnaire (vierge) sur lequel est inscrite la description des tâches, d'avec les productions écrites des élèves, qui sont les questionnaires remplis par eux. Dorénavant, lorsque nous discuterons de productions écrites, il s'agira des questionnaires remplis par les élèves.

Nous avons créé trois tâches de résolution de problème. Le questionnaire vierge contenant la description de ces tâches est composé de 3 documents contenant 2 pages chacun. De plus, lors de l'expérimentation, nous avons distribué les « cahiers de l'élève » constitué d'un document de 5 pages blanches vierges (un cahier pour chacune des tâches) sur lesquels les élèves devaient écrire directement leur démarche de résolution.

Nous précisons que durant l'expérimentation de la tâche 1, nous avons offert aux élèves une feuille de papier quadrillé pour compléter les dessins en perspective (cavalière, à 1 point de fuite, développement plan). Vingt-trois élèves parmi les trente-trois ont utilisé cet outil.

Nous avons présenté en classe les 3 tâches de résolution de problème comme un TP (travail pratique) non évalué, mais obligatoire, d'une durée de 75 minutes pour chacune des tâches. Les élèves avaient le droit d'utiliser leur calculatrice, leurs instruments de géométrie,

crayons à mines, crayons de couleur, surligneurs, gomme à effacer, etc. Pour la tâche 1, les élèves avaient accès à des objets physiques : des barres de chocolat Toblerone en format régulier ou des *Polydrons Frameworks* que nous leur avons distribués.

Pour la présentation du questionnaire en classe, nous avons lu à voix haute chacune des descriptions des tâches et leur avons indiqué qu'ils devaient résoudre les tâches comme si c'était un examen de résolution de problèmes, tel qu'ils sont habitués à les résoudre lors d'évaluations.

Les séances de résolutions des tâches se sont tenues le 9 avril 2014 pour la tâche 1 – du chocolat Toblerone !, le 10 avril 2014 pour la tâche 2 – pauvre Octaèdre !, et le 23 avril 2014 pour la tâche 3 – la tour décomposable, les trois durant les périodes normales d'enseignement. Deux mois avant de faire notre expérimentation, nous avons enseigné aux élèves les types de dessin en perspectives (cavalière, à 1 et à 2 points de fuite), les projections orthogonales (vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière), les développements plans (patrons) des polyèdres usuels, l'aire et le volume des solides.

a) Caractéristiques des élèves

Les participants que nous nommerons dorénavant « élèves » sont dans une classe de 3^e secondaire dans une école publique de la région de l'Outaouais et inscrits dans un curriculum standard, dans le cadre du programme de formation de l'école québécoise, en mathématique 063-306. De plus, dans cette école secondaire, il existe des concentrations appelées voies : « art de la scène », « informatique », « sports et plein air », « scientifique », « de l'engagement » et « arts plastiques ». Les élèves suivant le parcours nommé « voie scientifique » ont six périodes de cours de sciences au lieu de quatre et possèdent des résultats scolaires en mathématiques généralement plus élevés que les autres élèves inscrits dans les autres voies de l'école. La classe est constituée de trente-quatre élèves, soit seize filles et dix-huit garçons âgés de 14 ou de 15 ans.

Nous avons posé comme hypothèse de travail que ces élèves, considérés comme « performants » en mathématiques, détiennent des compétences bien développées en algèbre, en géométrie ainsi qu'en résolution de problème, et devraient donc posséder

également les trois compétences de perception spatiale, de visualisation spatiale et de connaissances spatiales pour résoudre des tâches de géométrie spatiale axées sur le calcul de volume. Nous voulons donc vérifier si notre hypothèse s'avérera fondée.

b) Contexte de recrutement des participants

Il y a eu d'abord présentation de notre projet, d'une durée de quarante-cinq minutes, à la direction et aux enseignants de mathématiques de notre école. Un formulaire d'information et de consentement fut transmis aux parents de chaque élève participant, par courriel et par lettre. Nous avons rencontré le groupe d'élèves afin de leur présenter notre projet de recherche. Les tâches données aux élèves ont été réalisées pendant les heures normales d'enseignement au moment où nous avons enseigné les concepts de volume et de connaissances spatiales. Ce sont des tâches de nature strictement scolaire. Les élèves qui ont refusé de participer à la recherche ont fait les tâches de toute façon puisqu'elles font partie intégrante de notre enseignement de la géométrie de l'espace, lui-même conforme au programme de formation. Les productions écrites de ces élèves n'ont pas été conservées parmi les données de notre recherche et leur travail a servi dans le processus normal de leurs apprentissages en mathématique de 3^e secondaire.

Nous précisons que les trois tâches réalisées et les productions écrites liées ont servi uniquement pour guider l'apprentissage. Elles n'ont été d'aucune façon prises en compte pour l'évaluation sommative et pour le résultat final compilé à la 3^e étape, qui s'est terminée le 20 juin 2014.

c) Mode de collecte de données : des tâches à proposer aux élèves

Les tâches qui constituaient le questionnaire furent fournies par nous. Pour élaborer ces tâches, il a été crucial que nous tenions compte du but de l'étude et des questions de recherche. Nous rappelons nos questions de recherche :

- Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volumes de solides usuels ?

- Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?
- Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

Les énoncés présentés dans chacune des questions des tâches doivent avoir un rapport avec les questions de recherche. Construire des questions se révèle tout un art! Nous avons construit intégralement chacune des questions des trois tâches à l'aide de matériel didactique provenant des maisons d'édition approuvées par le MELS ainsi que du matériel inédit créé par nous. La collaboration avec notre directeur de recherche fut également sollicitée.

Nous allons procéder à une description des tâches de résolution de problème axées sur le développement de deux compétences : les connaissances spatiales (le « *su* » de Parzysz, 1988) et le calcul de volume de solides décomposables avec le raisonnement approprié des formules de volumes.

Au départ, nous avions sept tâches de résolution de problèmes ce qui était beaucoup trop compte tenu des contraintes de temps et d'échéances scolaires : sept tâches de résolution de problème auraient nécessité plus de sept périodes d'une heure chacune consacrée à l'administration de ces tâches en salle de classe, un réajustement important de notre enseignement en mathématiques de 3^e secondaire, car nous rappelons que nous sommes avant tout enseignant de mathématique à temps plein et que nous devons suivre adéquatement notre planification annuelle.

3.3 L'instrument de cueillette de données : les trois tâches de résolution de problème

3.3.1 Élaboration des tâches finales

Chacune des tâches a été élaborée en fonction d'un objectif : apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche, que nous avons gardées en tête tout au long de ce processus.

3.3.2 Description des trois tâches choisies

a) Tâche 1 : du chocolat Toblerone !

Cette tâche de résolution de problème présente un niveau de difficulté élevé. Nous l'avons d'abord élaboré en nous basant sur certaines difficultés que présentaient nos élèves ; difficultés dont nous avons déjà discuté dans notre problématique (voir section 1.2). Par la suite, nous avons consulté notre directeur de recherche afin d'améliorer et de mettre mieux à niveau cette tâche. Cela a conduit à la création des questions *e* et *f*, qui exigeront des élèves d'aller plus loin dans leur raisonnement mathématique en les obligeant à utiliser leur perception spatiale, leur visualisation spatiale ainsi que leurs connaissances spatiales pour répondre adéquatement aux questions exigées.

Tâche 1 : du chocolat Toblerone !

Une compagnie suisse fabriquant la marque de chocolat Toblerone conçoit des emballages en forme de prisme à base triangulaire. Les deux bases de ce prisme sont des triangles équilatéraux. Voici une représentation d'une barre de chocolat Toblerone :



Figure 3.1 Barre de chocolat Toblerone

Voici les dimensions approximatives de la barre de chocolat :

- mesure du côté de la face triangulaire : 6 cm
- hauteur de la face triangulaire : 5,2 cm
- mesure d'un des côtés de la face rectangulaire : 30,5 cm

En juxtaposant trois de ces prismes, deux à deux le long des faces rectangulaires, on peut former un nouveau prisme.

- a) Nomme le nouveau prisme ainsi formé.
- b) Représente-le en perspective à 1 point de fuite, puis en perspective cavalière.
- c) Dessine un développement plan pour ce nouveau polyèdre. Indique les dimensions du nouveau prisme et identifie les bases du prisme par B_1 et B_2 .
- d) Calcule le volume de ce nouveau solide.
- e) Pour le temps des Fêtes, la compagnie Toblerone a mis sur le marché des boîtiers qui contiennent chacune un certain nombre de barres Toblerone. Ces boîtiers sont des prismes à base hexagonale. La mesure du côté de la base est de 6 cm, la mesure de l'apothème de la base est d'environ 5 cm et la hauteur de la boîte est de 30,5 cm. Est-il possible de remplir ces boîtes sans laisser d'espace vide ? Si oui, avec combien de barres Toblerone par boîte ? Représente en perspective cavalière la boîte de carton en montrant avec le dessin comment y sont placées les barres.

Nous avons construit la tâche 1 dans l'objectif d'exposer les rôles que peuvent jouer les connaissances spatiales dans l'application du calcul du volume d'un solide décomposable (un prisme régulier droit à base trapézoïdale). La tâche est conçue de manière à ce que l'élève soit dans l'obligation d'utiliser ses connaissances spatiales pour la réussir. Nous entendons par connaissances spatiales ce que nous avons défini dans notre cadre théorique (voir section 2.2.3).

De plus, toutes les questions de la tâche 1 ont été construites pour exposer les rôles de la visualisation spatiale en lien avec les connaissances spatiales qui seront déployées pour résoudre la tâche.

Dans la phase d'expérimentation de la tâche 1, les élèves avaient accès à des objets physiques réels : des barres de chocolat Toblerone (voir figure 3.1) qu'ils pouvaient examiner sous différents angles, manipuler, juxtaposer, déplacer, positionner dans l'espace, etc. Plus spécifiquement, chacun des élèves avait à sa disposition soit trois barres de chocolat Toblerone, soit trois modèles de structures emboîtables de type *Polydrons Frameworks* que nous avons distribués au début de l'expérimentation. Les structures emboîtables sont des formes géométriques en plastique rigide (triangle, carré, rectangle, hexagone, décagone, dodécagone) de différentes dimensions possédant chacun des enclaves aux extrémités, facilitant leur assemblage pour construire les squelettes de solides géométriques tridimensionnels (voir figure 3.2). Notre intention ici était de fournir des objets concrets servant à la visualisation spatiale.

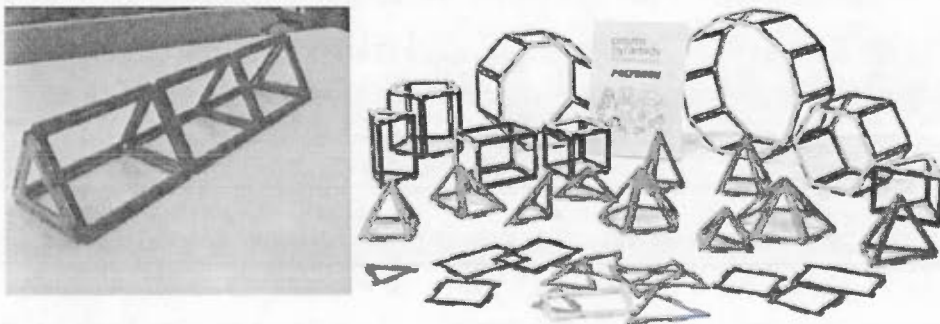


Figure 3.2 Structures emboîtables de type *Polydrons Frameworks*

De plus, plusieurs études (Vergnaud et al., 1983 ; Janvier, 1992, 1994, 1997 ; Miller & Mercer, 1993 ; Scalander, Johnson, Lockwood & Medina, 2012) montrent que l'emploi d'objets physiques réels 3D manipulables aide à mieux gérer l'application des formules de volume de solides décomposables.

b) Tâche 2 : pauvre Octaèdre !

Cette tâche constitue une situation de résolution de problème possédant un niveau de difficulté très élevé. Tout comme la tâche 1, elle a exigé de notre part des « retouches » successives, car au départ, elle était trop difficile surtout à cause de la troncature de l'octaèdre.

Dans cette tâche, les élèves n'ont pas accès à des objets réels 3D ou à des structures emboîtables comme des *Polydrons Frameworks*. Notre intention ici est que l'élève soit dans l'obligation de se servir des dessins 2D, c'est-à-dire des représentations de l'octaèdre régulier accompagnant le texte de la situation problème. En conséquence, nous voulons vérifier si l'élève utilisera la capacité de visualisation spatiale pour résoudre la tâche. Ainsi, il doit se détacher du matériel de manipulation pour résoudre la situation problème d'une manière abstraite et progressive.

La représentation spatiale (dessin 2D) accompagnant la tâche 2 constitue une représentation d'un octaèdre 3D en perspective cavalière, que nous avons construite avec un logiciel de traitement d'image.

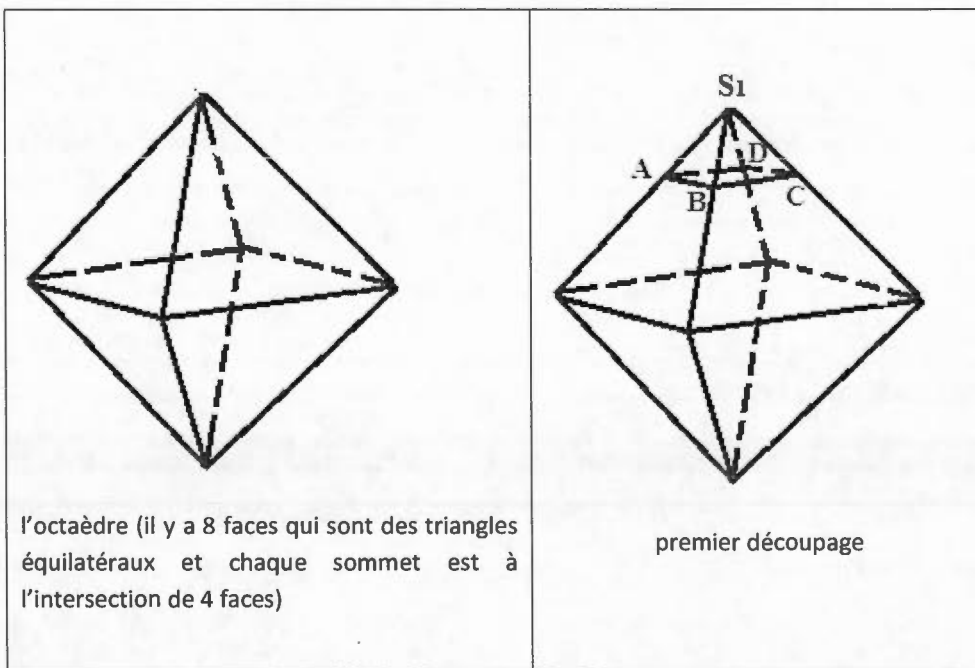
L'objectif de la première partie de la tâche 2, tout comme pour la tâche 1, est que les élèves puissent mobiliser leur perception et leur visualisation spatiales (le « *vu* » de Parzysz) ainsi que leurs connaissances spatiales (le « *su* » de Parzysz) pour résoudre la situation problème. Un deuxième objectif est que l'élève puisse bien utiliser les propriétés caractéristiques du nouveau solide créé résultant de la troncature de la figure initiale (octaèdre). Ainsi, l'élève devra d'abord se servir de la visualisation directe du dessin 2D de l'octaèdre avant sa troncature, puis utiliser la visualisation interne résultant d'un processus de création d'images mentales, tel que « voir dans sa tête » le nombre de face ainsi que leur forme, résultant de la troncature de l'octaèdre ; des images de modélisation (*pattern images*) représentant des relations mathématiques abstraites d'une manière visuelle, tel que se représenter

mentalement le nombre de sommets ainsi que le nombre d'arêtes dans le nouveau solide créé.

Tâche 2 : pauvre octaèdre !

D'abord, nous précisons que le texte qui accompagne les figures ainsi que les figures elles-mêmes (apparaissant ci-dessous) sont fournies avec l'énoncé de la tâche.

Amélie a un bel octaèdre régulier en bois massif sur sa cheminée. Mais elle trouve qu'il prend trop de place et décide d'en scier une partie autour de chaque sommet.



Elle marque précisément les points A, B, C, D au tiers de chaque arête jointe en un sommet S_1 , et elle scie selon le plan qui passe par les points A, B, C, D. Elle refait la même opération avec les autres sommets de l'octaèdre. À la fin elle se retrouve avec des pyramides détachées et la partie centrale qui est un nouveau polyèdre tout à fait intéressant.

- a) Combien le nouveau polyèdre d'Amélie a-t-il de faces ? De quelles formes sont-elles ?
- b) Combien ce polyèdre a-t-il de sommets ? Et combien d'arêtes ?
- c) Dessine un développement plan de ce nouveau polyèdre.

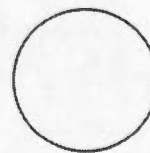
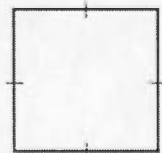
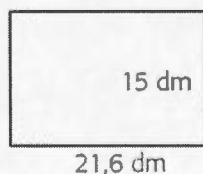
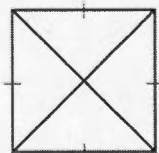
d) Représente avec la règle usuelle de 30 cm, ce nouveau solide sur une feuille de papier, en perspective cavalière et en perspective à 1 point de fuite.

e) Calcule le volume résultant formé par le nouveau solide, sachant que la mesure du côté d'un des triangles équilatéraux dans le polyèdre de départ est de 6 cm.

La tâche 2 possède un niveau de difficulté plus élevé que la tâche 1. Dans le document donné aux élèves, ceux-ci ont une représentation 3D d'un octaèdre (voir les figures ci-dessus) ainsi que ses dimensions. Puis, on procède à une troncature partielle de l'octaèdre. Ensuite, les élèves ont à identifier le nouveau solide ainsi formé en le représentant en perspective cavalière, en perspective à un point de fuite et en le dessinant dans un développement plan. Finalement, nous leur demandons de calculer le volume de l'octaèdre partiellement tronqué.

c) Tâche 3 : la tour décomposable

Une tour est formée de quatre pièces de bois superposées, ces pièces de bois constituant des solides équivalents : le bas de la tour est formé d'un cylindre droit. Il est surmonté d'un cube, puis d'un prisme droit à base rectangulaire et, enfin, d'une pyramide droite à base carrée. Toutes les bases sont équivalentes. Voici un dessin des bases de chaque pièce composant la tour.



a) Calcule les dimensions de chaque pièce et son volume.

b) Représente, en perspective cavalière, la tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la composent.

Voici deux indices pour résoudre le problème :

1) Des figures planes sont dites équivalentes si elles ont la même aire.

2) Des solides sont dits équivalents s'ils ont le même volume.

La tâche 3 est d'un niveau de difficulté semblable à la tâche 1. Nous fournissons une représentation des objets géométriques 3D, soit les projections orthogonales (vue de dessus) des 4 solides réguliers suivants : une pyramide droite à base carrée, un prisme droit à base rectangulaire, un cube ainsi qu'un cylindre droit.

Notre objectif dans cette tâche est triple, d'abord que l'élève utilise sa capacité à comprendre la vue de dessus des objets 3D (une projection orthogonale) combinés à ses connaissances spatiales antérieures pour résoudre la situation problème. Ensuite, que l'élève sache « raisonner » sur les formules d'aires et de volumes des solides (cube, prisme droit à base rectangulaire, cylindre droit et pyramide droite à base carrée) afin de déterminer, par une démarche de résolution algébrique, les mesures manquantes de chaque solide. Finalement, l'élève devra élaborer une représentation en perspective cavalière des solides superposés – la tour décomposable.

Qui plus est, nous avons fourni deux indices afin que les élèves complètent la situation problème. Ces indices constituent plutôt une précision terminologique, puisque le terme « équivalent » appliqué aux figures planes et aux solides n'apparaît que dans le programme de mathématique 063-504-CST de 5^e secondaire. Or, ils vont s'avérer nécessaires pour résoudre la partie algébrique du problème dans la recherche des mesures manquantes telles que certaines dimensions (mesure de l'arête du cube, du rayon du cylindre, de la hauteur du prisme, de la hauteur de la pyramide et de la hauteur du cylindre) ainsi que le calcul d'aires et de volumes des quatre solides.

3.4 Analyse *a priori* des tâches de résolution de problème

3.4.1 Analyse *a priori* de la tâche 1 – du chocolat Toblerone !

Dans cette section nous décrivons une analyse *a priori* de la tâche 1 pour chaque question demandée. Nous allons indiquer la solution contenant l'identification des connaissances spatiales nécessaires ainsi qu'une anticipation des difficultés et erreurs pouvant se produire. Pour ce faire, nous allons utiliser une grille comportant deux questions :

1° Quelles sont les consignes à respecter ?
2° Comment les élèves doivent-ils procéder pour réaliser la tâche ?

Figure 3.3 Grille d'analyse *a priori* des 3 tâches

Question a : Nomme le nouveau prisme ainsi formé.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter: les élèves doivent répondre clairement à la question posée en nommant le nouveau solide formé. Le nouveau solide formé est un prisme à base trapézoïdale.

Comment doivent-ils procéder ?

D'abord, les élèves ont à leur disposition trois objets physiques réels, soit trois barres de chocolat *Toblerone* de mêmes dimensions, qu'ils peuvent manipuler, assembler ou juxtaposer pour former le nouveau solide. Ils ont également des *Polydrons Frameworks* qu'ils peuvent utiliser pour modéliser le nouveau solide. Les élèves vont se servir de leur perception et de leur visualisation spatiale ainsi que de leurs connaissances antérieures. Voici l'identification d'éléments de perception spatiale, de visualisation spatiale et de connaissances spatiales nécessaires pour répondre adéquatement à la *question a* :

Éléments de perception spatiale

- Percevoir la forme globale des 3 barres Toblerone assemblées : soit dans le sens de la longueur « bout à bout », soit sous forme de prisme droit régulier à base trapézoïdale.

Éléments de visualisation spatiale

- Visualisation externe (directe) des faces des 3 barres Toblerone non assemblées : chacune des barres contient 2 bases qui sont des triangles équilatéraux dont l'arête mesure 6 cm et des faces latérales constituées de 3 rectangles mesurant 6 cm par 30,5 cm.
- Visualisation externe de la juxtaposition des 3 barres Toblerone : un nouveau solide apparaît, soit un prisme droit régulier à base trapézoïdale. Les deux bases sont des trapèzes avec les constituants suivants : la grande base B mesure 12 cm, la petite base b mesure 5 cm, et la hauteur h mesure 5,2 cm, soit la même que celle de la base triangulaire d'une barre Toblerone. La hauteur du nouveau prisme est de 30,5 cm, soit la même que celle d'une barre Toblerone.

Éléments de connaissances spatiales

Prisme

Un prisme est un polyèdre.

- ✓ Les deux faces appelées « bases » sont deux polygones isométriques, dont les sommets homologues sont reliés deux à deux par des segments de droites parallèles, formant ainsi des parallélogrammes qui sont les faces latérales du prisme : il y en a autant que de côtés pour le polygone de base.
- ✓ Un prisme droit est un prisme dont les faces latérales sont des rectangles.
- ✓ Le développement plan (patron) d'un prisme est une figure plane obtenue par la mise à plat de la surface du solide. Le développement plan impose de relier chaque face à au moins une autre face par une arête commune. Le solide doit être vu comme résultant d'un pliage de la surface développée.

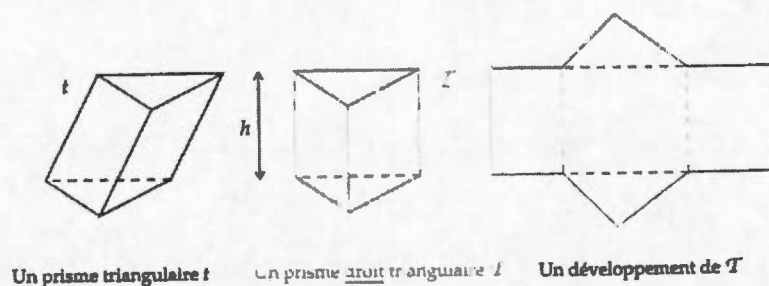


Figure 3.4 Développement d'un prisme (Source : Baruk, S., Dictionnaire de mathématiques élémentaires, 1995, p. 916)

Difficultés qui pourraient se présenter dans la résolution de la tâche 1 – question a :

Nous catégorisons le niveau de difficulté comme étant faible. Nous prévoyons qu'à partir du solide final, c'est-à-dire celui obtenu par l'assemblage des trois barres de chocolat Toblerone le long des faces latérales, l'élève « voit » aisément cette forme finale (figure 3.5) et qu'il soit en mesure de la nommer correctement, soit un prisme droit régulier à base trapézoïdale.

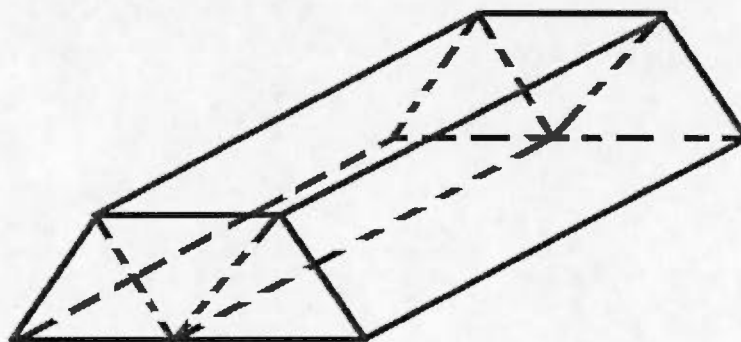


Figure 3.5 Solide final obtenu par assemblage (juxtaposition), en perspective cavalière

Ici, la solution consiste à placer l'une sur l'autre le long des faces rectangulaires, chacune des trois barres Toblerone comme dans la figure 3.6a.

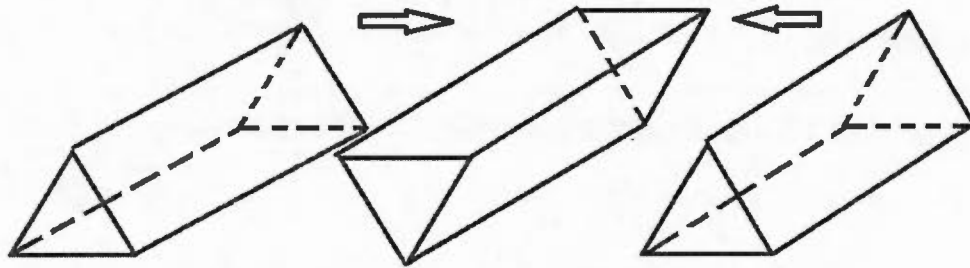


Figure 3.6a Assemblage ou juxtaposition des 3 prismes droits réguliers à base triangulaire en perspective cavalière.

La juxtaposition fait apparaître les nouvelles faces latérales constituées de quatre nouveaux rectangles qui sont en fait issus de la figure initiale, et dont un n'a pas les mêmes dimensions que les trois autres. Plus spécifiquement, ce rectangle aurait comme dimensions 12 cm par 30,5 cm et serait la face du dessous du prisme droit régulier à base trapézoïdale (voir figure 3.5). Cela fait apparaître les nouvelles bases du solide qui sont deux nouvelles figures planes : deux trapèzes isométriques, résultant de la juxtaposition de trois triangles équilatéraux.

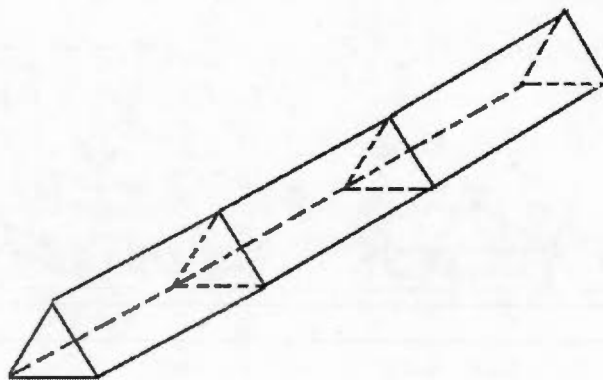


Figure 3.6b Juxtaposition « bout à bout » selon les bases triangulaires

Une solution erronée envisageable serait de juxtaposer « bout à bout », à partir des bases triangulaires, chacune des trois barres. Cette solution ne respecte pas une des directives présentées dans le 1^{er} paragraphe de la tâche 1, à savoir que la juxtaposition doit se faire le long des faces rectangulaires et non triangulaires (voir figure 3.6b).

Question b : Représente-le en perspective à 1 point de fuite, puis en perspective cavalière.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent dessiner le nouveau solide selon deux techniques différentes : perspective à 1 point de fuite, puis perspective cavalière. Les caractéristiques de chaque perspective doivent être présentes dans les deux représentations.

Comment doivent-ils procéder ?

L'élève utilise la visualisation directe ainsi que la visualisation interne, c'est-à-dire qu'il se construit des images mentales du nouvel objet 3D. Finalement, il le représente en perspective cavalière ainsi qu'en perspective à 1 point de fuite.

Voici une solution possible d'une représentation en perspective à 1 point de fuite :

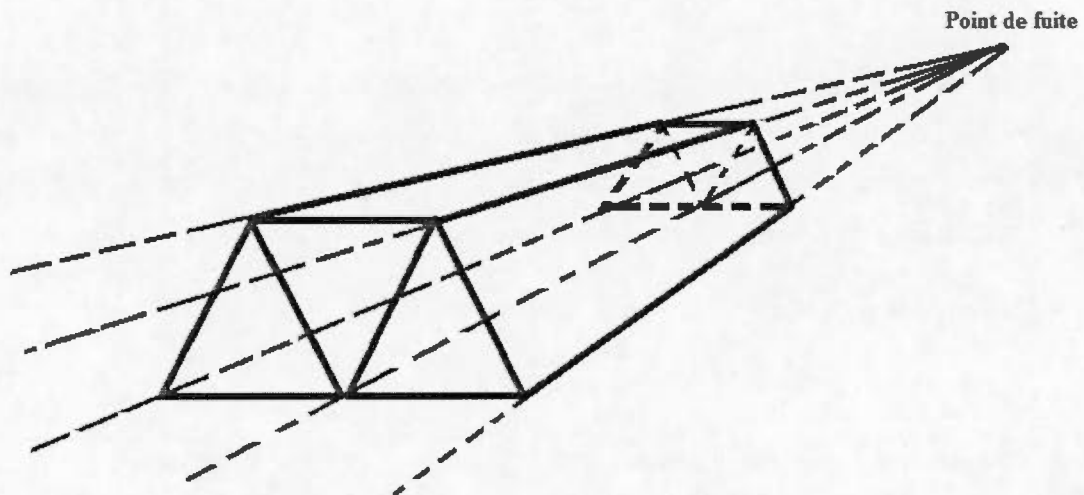


Figure 3.7 Représentation des 3 barres *Toblerone* (nouveau solide) en perspective à 1 point de fuite

Voici une solution possible de la représentation en perspective cavalière des trois barres Toblerone, avec les dimensions indiquées :

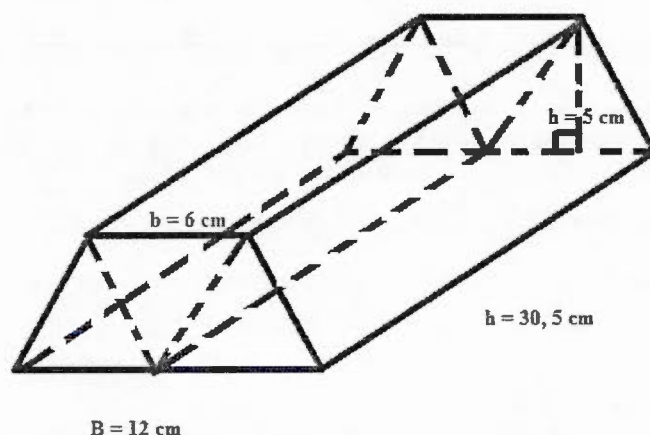


Figure 3.8 Représentation des 3 barres *Toblerone* (nouveau solide) en perspective cavalière

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 1 — question b:

De par ses caractéristiques mathématiques, la perspective cavalière (qui est enseigné au secondaire comme « projection parallèle ») offre un compromis entre le « vu » et le « su », en préservant de nombreuses propriétés : alignement, rapports selon une même direction, etc. Cependant, les dessins présentent des aberrations visuelles au nombre desquelles :

- la non-conservation des angles ;
- la non-conservation des égalités ou inégalités de longueur ;
- l'existence de propriétés apparentes liées à l'opération de projection : « fausse orthogonalité », « faux alignement », « fausse (in)égalité de longueurs », etc.

Pour la perspective à 1 point de fuite, nous anticipons certaines difficultés, notamment parce qu'elle est peu travaillée au secondaire et quand elle l'est, le travail ne porte que sur des

solides relativement simples : cubes, prismes droits à base carrée ou à base rectangulaire, et parfois des pyramides droites à base carrée ou à base rectangulaire.

Voici les difficultés que nous anticipons :

- décider de l'emplacement du point de fuite sur la ligne d'horizon : il est important qu'il soit placé de biais et pas trop près du dessin. De plus, si le point de fuite est trop éloigné de l'objet dessiné, alors le plan frontal (ici ce sera une des bases trapézoïdales) du prisme droit demeure parallèle à la feuille de papier, mais les autres faces dessinées (latérales) seront très déformées par rapport à la réalité ;
- difficulté à mobiliser ses connaissances antérieures des règles (conventions) de la perspective à 1 point de fuite ;
- dessiner correctement les arêtes horizontales, sachant qu'elles sont parallèles dans la réalité, mais ne le sont pas dans le dessin 2D ;
- des confusions avec la perspective à 2 points de fuite ; en effet ce qui est dans le plan de la feuille diffère selon la perspective : une face dans le cas du dessin à un point de fuite, une arête dans le dessin à 2 points de fuite ;
- se rappeler (connaissances antérieures) que les arêtes horizontales et les arêtes verticales sont parallèles entre elles ;
- se rappeler qu'il est important de réduire d'environ la moitié la mesure des fuyantes convergeant vers le point de fuite. Ces fuyantes représentent la profondeur du solide.

Toutefois, nous anticipons que les élèves n'auront que peu de difficultés dans cette *question b*. En effet, dans notre enseignement, nous avons vérifié à maintes reprises par des exercices d'application que la majorité des élèves sont habiles à représenter en perspective cavalière de même qu'en perspective à 1 point de fuite des prismes droits réguliers ainsi que des solides décomposables formés de différents types de prismes avec des bases différentes (carré, rectangle, triangle et autres polygones).

Question c : Dessine un développement plan pour ce nouveau polyèdre. Indique les dimensions du nouveau prisme et identifie les bases du prisme par B1 et B2.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter: les élèves doivent dessiner le développement plan du nouveau polyèdre en indiquant clairement les dimensions ainsi que les deux bases du polyèdre.

Comment doivent-ils procéder ?

Tel que discuté dans notre problématique (voir section 1.3.2), la capacité à comprendre les développements plans (patrons) relève de la visualisation interne. Mais, d'abord, les élèves utilisent leur perception spatiale puisqu'ils sont en présence d'objets 3D physiques (soit les 3 barres Toblerone, soit les 3 assemblages de *Polydrons Frameworks*) ; puis, ils la complètent en ayant recours à la visualisation externe (que nous avons définie dans notre problématique) à l'aide de changements de position du nouveau prisme formé. Il est possible également qu'ils se déplacent eux-mêmes en se positionnant de différentes façons.

Ensuite, l'élève doit faire un dessin 2D – un développement plan – de l'objet 3D qu'il a devant lui. Il est donc dans l'obligation d'utiliser ses connaissances spatiales pour produire ce dessin 2D selon les conventions (règles) qu'il a apprises. Il représente donc les faces du nouveau prisme à base trapézoïdale dans lequel ces faces sont toutes reliées par au moins une arête.

Un même polyèdre (ici un prisme droit régulier à base trapézoïdale) compte plusieurs développements plans différents. Pour que deux développements plans soient considérés comme différents, ils ne peuvent être associés par une isométrie du plan. Il y a donc plusieurs « bonnes réponses » possibles et une seule était demandée. Les élèves utilisent leurs instruments de géométrie (règles, compas, rapporteur d'angles, équerres) au besoin pour dessiner le développement plan.

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 1 – question c :

La représentation des objets 3D par les dessins 2D des développements plans est directement liée à la capacité des élèves à combiner et analyser les images mentales. En effet

l'élève part d'une des faces qu'il dessine d'abord, puis doit décomposer mentalement le solide pour voir quelles autres faces lui sont adjacentes, le long de quelle arête, et ainsi ajouter les faces une à une jusqu'à ce que toutes les faces soient épuisées et dessinées dans le développement. Il y a donc avant tout un processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) qui relève de la visualisation interne, mais aussi une visualisation externe à travers laquelle l'élève repère sur le solide les arêtes partagées par deux faces, les sommets partagés par plusieurs arêtes, et les positions relatives de ces éléments. Quand il y a autant de faces dessinées qu'il y a de face dans le solide, l'élève doit normalement vérifier que le développement fonctionne en imaginant des rotations des faces le long des axes qui portent les arêtes, pour reconstituer mentalement les pliages permettant de reconstruire le solide. La visualisation mentale nécessaire à la reconstitution de ces pliages est hautement sophistiquée parce qu'elle requiert la coordination de plusieurs mouvements de rotation, selon des axes différents, et une perception mentale sûre de la structuration 3D du solide initial.

Voici la solution (parmi d'autres) d'un développement plan possible pour le nouveau solide :

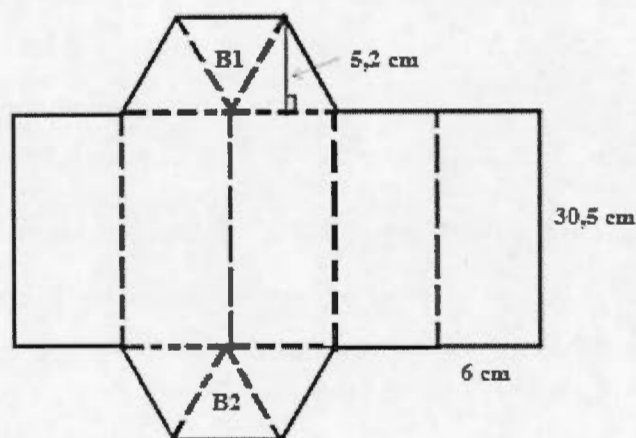


Figure 3.9 Un développement plan (patron) possible du nouveau solide

Question d : Calcule le volume de ce nouveau solide.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent calculer le volume du prisme droit régulier à base trapézoïdale en se servant de la formule de volume appropriée.

Comment doivent-ils procéder ?

Nous anticipons qu'il y aura deux façons de procéder pour calculer le volume du nouveau solide.

1^{re} façon

Après avoir identifié par visualisation directe sur le développement plan les mesures de la grande base B , de la petite base b , de la hauteur h de la base du prisme ainsi que la mesure de la hauteur du prisme que nous allons nommer H_{solide} , les élèves substituent les mesures qu'ils ont identifiées dans la formule de volume :

$$\begin{aligned} \text{Volume prisme à base trapézoïdale} &= \frac{((B + b) \times h)}{2} \times H_{\text{solide}} \\ &\approx \frac{((12 + 6) \times 5,2)}{2} \times 30,5 \approx 1427,40 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

2^e façon

L'élève pourrait aussi calculer le volume d'une barre Toblerone et multiplier par trois en utilisant la formule usuelle du volume du prisme droit régulier à base triangulaire.

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 1 –question d

Dans le calcul du volume du nouveau solide obtenu, l'élève doit montrer qu'il maîtrise son aptitude au raisonnement mathématique en appliquant correctement la bonne formule de volume. Voici les difficultés que nous anticipons chez l'élève :

- ✓ Reconnaître les bonnes données, repérer quelles sont les bonnes mesures à substituer dans la formule.
- ✓ Bien visualiser le solide dont il doit calculer le volume, c'est-à-dire repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale en perspective cavalière du solide pour appliquer la bonne formule de volume d'un prisme droit régulier à base trapézoïdale : la forme de la base est un trapèze, donc, identifier spatialement où est

la grande base B , la petite base b , ainsi que la hauteur h du trapèze; visualiser la hauteur du solide que nous nommons H_{prisme} pour la différencier de la hauteur h de la base trapézoïdale.

- ✓ Confusion entre la hauteur de la base trapézoïdale du solide et la hauteur du solide, qui selon la représentation donnée sera plus perçue comme une « longueur » ou une « profondeur », la longueur ou profondeur de la barre de chocolat.

Question e

Pour le temps des Fêtes, la compagnie Toblerone a mis sur le marché des boîtiers qui contiennent chacune un certain nombre de barres Toblerone. Ces boîtiers sont des prismes à base hexagonale. La mesure du côté de la base est de 6 cm, la mesure de l'apothème de la base est d'environ 5 cm et la hauteur de la boîte est de 30,5 cm. Est-il possible de remplir ces boîtes sans laisser d'espace vide ? Si oui, avec combien de barres Toblerone par boîte ? Représente en perspective cavalière la boîte de carton en montrant avec le dessin comment y sont placées les barres.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent imaginer que les boîtiers contiennent un certain nombre de barres Toblerone formant un prisme à base hexagonale. Ils doivent produire une représentation en perspective cavalière en identifiant les constituants de ce prisme (mesure du côté de la base, apothème et hauteur du prisme), dire combien il y a de barres que l'on peut placer à l'intérieur et montrer comment elles sont placées.

Comment doivent-ils procéder ?

Cette question revêt deux aspects. Premièrement, l'élève devra visualiser mentalement que la base hexagonale du prisme se découpera en six triangles équilatéraux, ce qui constitue un découpage relativement « standard » pour les élèves, puisque ce découpage des polygones réguliers est habituellement travaillé au primaire (5^e et 6^e années).

Deuxièmement, l'élève devra réaliser une représentation en perspective cavalière de l'objet 3D en ayant recours à la visualisation spatiale des six barres de chocolat *Toblerone* formant un nouveau prisme (figure 3.10).

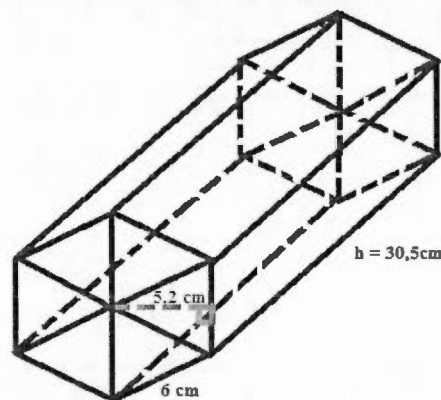


Figure 3.10 Représentation en perspective cavalière du prisme droit régulier à base hexagonale

Nous envisageons que certains élèves pourraient très bien avoir repéré le découpage de l'hexagone en six triangles équilatéraux sans réussir le dessin 2D en perspective cavalière.

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 1 – question e :

Une difficulté concerne l'assemblage du boîtier. Il faut pour cela que l'élève ait recours à la visualisation soit externe, soit interne pour « découvrir » comment sont placées les 6 barres Toblerone. Toutefois, puisque l'élève a accès à des objets physiques, alors il lui sera plus facile de se représenter ce nouveau solide.

3.4.2 Analyse *a priori* de la tâche 2 : pauvre Octaèdre !

Question a : *Combien le nouveau polyèdre d'Amélie a-t-il de faces ? De quelles formes sont-elles ?*

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves devraient répondre clairement à la question posée en indiquant le nombre de faces du nouveau solide et en décrivant les formes de ces faces.

Comment doivent-ils procéder?

Les élèves devraient se servir de leurs connaissances spatiales antérieures (voir cadre théorique section 2.2.3). De plus, utiliser la visualisation externe à partir du dessin de l'octaèdre fourni avec le questionnaire, puis recourir à la visualisation interne pour amorcer une déconstruction dimensionnelle des formes des faces du nouveau solide : un octaèdre tronqué. Par exemple, l'élève pourrait débiter par le découpage selon le plan ABCD et visualiser mentalement que la forme résultante de la face sera un carré (une 1^{re} base d'une des 6 « petites » pyramides à base carrée). Ensuite, déduire qu'il y aura dans le nouveau solide, 6 carrés à la suite de l'opération de troncature, puisqu'il y a 6 sommets dans l'octaèdre.

En utilisant un processus de déconstruction d'une face triangulaire de l'octaèdre, recourir à la visualisation interne pour créer une image mentale d'une nouvelle face qui sera, cette fois-ci, de forme hexagonale tout en se servant du raisonnement proportionnel puisqu'il s'agit d'une troncature au tiers de chaque arête ($\frac{1}{3} \times 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$). Ainsi, chaque arête qui mesurait 6 cm dans l'octaèdre sera « décomposée » en 3 segments isométriques de 2 cm et en conséquence, la nouvelle face sera un hexagone régulier. Finalement, visualiser mentalement qu'il y aura 8 faces hexagonales dans l'octaèdre tronqué, une pour chacune des 8 faces triangulaires initiales dans l'octaèdre.

Dans le texte décrit à la tâche 2, soit :

Elle (Amélie) marque précisément les points A, B, C, D au tiers de chaque arête. Elle choisit ensuite un sommet (point S sur le dessin) et scie selon le plan qui passe par les points (A, B, C, D) des quatre arêtes qui se joignent à ce sommet. Elle refait la même opération avec les autres sommets de l'octaèdre. À la fin elle se retrouve avec des pyramides détachées et la partie centrale qui est un nouveau polyèdre tout à fait intéressant.

Il y aura un décodage de mots-clés à réaliser :

- marquer précisément les points A, B, C D au tiers de chaque arête ;

- scie selon le plan qui passe par les points A, B, C et D des quatre arêtes qui se joignent à ce sommet ;
- refait la même opération avec les autres sommets de l'octaèdre ;
- des pyramides détachées ;
- la partie centrale est un nouveau polyèdre.

Analysons chacun de ces mots-clés.

1° marque précisément les points A, B, C, D au tiers de chaque arête :

L'élève a devant lui, sur sa feuille, un dessin en perspective cavalière où nous avons placé avec un logiciel de traitement d'image les quatre points A, B, C et D ainsi que les segments joignant ces quatre sommets, formant ainsi la base carrée de la pyramide. Au tiers de chaque arête, signifie que l'arête sera coupée précisément à $\frac{1}{3}$ de la longueur de l'arête qui mesure 6 cm. En conséquence, l'élève devra se représenter mentalement où l'octaèdre est coupé, selon les points A, B, C et D d'abord et selon les autres groupes de quatre points autour de chaque sommet. Ces points ne sont pas nommés explicitement pas plus qu'ils ne sont identifiés sur le dessin présenté aux élèves (ils devront donc les indiquer sur leur représentation 2D, par exemple en les nommant EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX). Ainsi, l'élève devra visualiser mentalement qu'il a affaire à une troncature de l'octaèdre qui formera un nouveau solide. Toutefois, il n'est pas demandé à l'élève de nommer – ou d'identifier – ce nouveau solide. Nous anticipons que la compétence à visualiser par des images mentales de modélisation et des images mentales dynamiques (voir cadre théorique section 2.2.2) sera fortement mobilisée parce que les élèves auront une difficulté à utiliser leur visualisation externe sur le dessin de l'octaèdre fourni avec le questionnaire (présence de faces cachées dans la représentation 2D).

2° scie selon le plan qui passe par les points A, B, C et D des quatre arêtes qui se joignent à ce sommet et refait la même opération avec les autres sommets de l'octaèdre :

L'expression « scie selon le plan » signifie qu'en coupant l'octaèdre aux points mentionnés, il y aura création d'une section plane dans le solide. En conséquence, l'élève devra utiliser sa capacité de visualisation interne et amorcer une visualisation de ce que deviennent les

faces initiales, tout en reconstituant les relations d'incidence dans le solide tronqué, afin d'interpréter de quelles formes sera constitué le nouveau solide. Par conséquent, la visualisation interne aura un rôle déterminant dans la réussite de la *question a*.

La compréhension du concept de « plan » peut s'avérer un problème pour plusieurs élèves. En effet, dans l'enseignement de la géométrie spatiale au secondaire, les représentations de « plans », le plus souvent des parallélogrammes dans les manuels scolaires, n'aident pas les élèves à imaginer de prolonger les plans.

3° des pyramides détachées :

L'élève devra s'interroger sur le type de pyramide dont il s'agit après la troncature. Nous anticipons que l'élève verra immédiatement – nous pouvons faire un lien avec la compétence « perception spatiale » – qu'il aura affaire à six pyramides droites régulières à base carrée.

4° la partie centrale est un nouveau polyèdre :

Le polyèdre à obtenir sera de quel type? Il est plus facile de s'imaginer le solide résultant parce qu'on voit assez bien l'hexagone, qui remplacera chacune des faces triangulaires, se former après les coupes : elles se font le long des segments qui joignent les points au premier tiers de l'arête à partir du sommet. De plus, les 6 coupes produiront 6 pyramides à base carrée détachées de l'octaèdre. Finalement, la solution complète est la suivante : « le nouveau polyèdre formé possède 14 faces et ces faces constituent 8 hexagones réguliers ainsi que 6 carrés ».

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 2 a – question a :

Une première difficulté aurait trait au découpage de l'octaèdre (voir figure 3.11) selon les sections dans le solide passant par les points ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX. Puisque l'élève n'a pas accès à l'objet physique (octaèdre tronqué), mais seulement à une représentation 2D de l'octaèdre fourni avec le questionnaire, cette visualisation sera plus sophistiquée. Plus spécifiquement, cette difficulté de visualisation concerne la capacité de reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D

(voir chapitre 1 section 1.3.2). Cela revient le plus souvent à imaginer l'objet sous d'autres angles que celui selon lequel l'objet est présenté en 2D, et par conséquent cela revient à être capable d'imaginer par une série d'images mentales comment se présente l'objet après rotation pour nous informer sur tel constituant de l'objet 3D (voir figure 3.11)

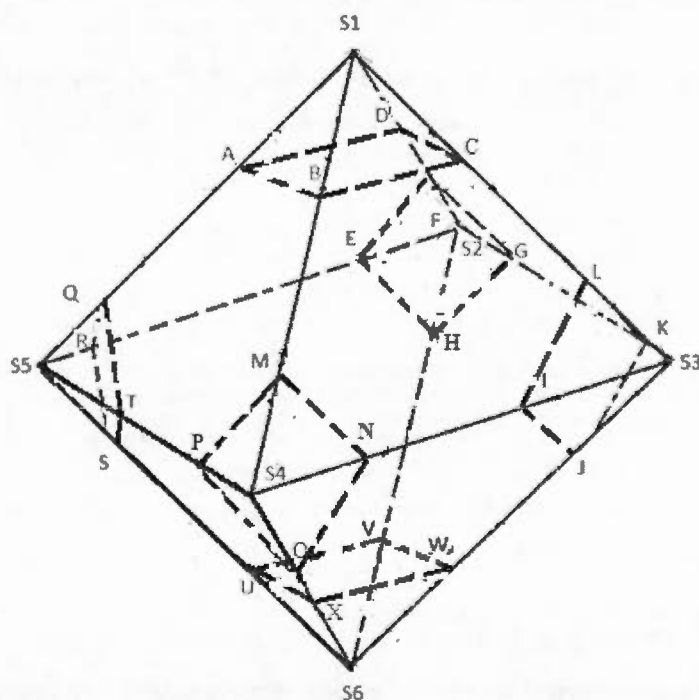


Figure 3.11 Découpage selon les points ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX

Qui plus est, la rotation d'un solide effectuée « mentalement » permet d'imaginer par des images mentales dynamiques quelles sont les symétries du solide, comment s'organisent les faces, les arêtes et les sommets, et ce, pour aider par la suite à repérer les découpages et les longueurs qui permettent un calcul de volume.

Une fois la visualisation mentale effectuée, une autre difficulté pourrait se manifester, soit la production d'un dessin 2D à partir de l'octaèdre pour faire « apparaître » sur ce dessin 2D l'organisation des faces entre elles et la structuration des arêtes de l'octaèdre tronqué. Autrement dit, l'élaboration d'une représentation plane (octaèdre tronqué) pourrait permettre à l'élève de « concrétiser », la visualisation de l'objet 3D.

Question b : Combien ce polyèdre a-t-il de sommets ? Et combien d'arêtes ?

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter: les élèves doivent répondre clairement à la question posée en indiquant le nombre de sommets ainsi que le nombre d'arêtes du nouveau solide créé par la troncature de l'octaèdre.

Comment doivent-ils procéder?

La solution est la suivante : le nouveau polyèdre créé résultant de la troncature de l'octaèdre au tiers des arêtes à partir de chaque sommet contient 24 sommets et 36 arêtes.

Dans les lignes qui suivent, nous allons nous référer à la figure 3.11 pour expliquer comment l'élève pourrait procéder. Il utilisera d'abord la visualisation externe en débutant par une des faces triangulaires de l'octaèdre (par exemple la face $S_1S_5S_4$) qui sera coupée au tiers de chaque arête, puis il élaborera une image mentale de cette 1^{re} face qui sera un hexagone régulier (face ABMPTQ), et continuera le processus en visualisant mentalement les 7 autres hexagones (BCLINM, CLKGFD, ADFERQ, TPOXUS, NOXWJI, GKJWVH, REHVUS) parce qu'il y a 7 autres faces triangulaires qui seront ainsi découpées au tiers de chaque arête. Qui plus est, il utilisera la compétence de visualisation interne pour les mêmes coupes, mais cette fois-ci à « l'intérieur » de l'octaèdre en se créant une image mentale d'une face carrée (face ABCD). Puis, il lui faudra créer 5 autres images mentales de « carrés » (faces EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX) qui seront à la fois des faces de l'octaèdre tronqué et des faces des « petites » pyramides droites détachées de l'octaèdre. La visualisation interne devra être mobilisée de nouveau, mais cette fois, les images mentales résultantes seront plus sophistiquées à cause des faces adjacentes hexagonales partagées par telle arête, combinées avec la visualisation mentale des faces carrées qui sont disposées à « l'intérieur » du solide. En faisant le décompte des faces, l'élève obtiendra ainsi 8 faces hexagonales et 6 faces carrées.

Une 2^e manière de déterminer le nombre de faces consiste à utiliser la visualisation externe, directement sur le dessin en perspective cavalière de l'octaèdre (fourni avec le

questionnaire) et de constater que partout où il y avait un sommet dans l'octaèdre s'ajoute une nouvelle face carrée par troncature, donc 6 nouvelles faces (carrées) s'ajoutent. Par ailleurs, chacune des faces triangulaires initialement dans l'octaèdre est « transformée » en face hexagonale par troncature, il y a donc 8 faces hexagonales et $8 + 6 = 14$ faces en tout.

À partir du décompte des faces, l'élève pourrait obtenir le nombre de sommets du nouveau solide. D'abord, il pourrait commencer le décompte avec les 4 faces de la « partie supérieure » de l'octaèdre soit la pyramide droite à base carrée (voir figure 3.11) : une 1^{re} face hexagonale (ABMPTQ) contiendra 6 sommets, le décompte des sommets de la 2^e face hexagonale (BCLINM) qui lui est adjacente selon une arête n'aura que 4 sommets, soit 2 de moins que la 1^{re} face puisque ces deux faces possèdent 2 sommets communs (B et M). Ensuite, le décompte des sommets de la 3^e face hexagonale (CLKGFD) aura 4 sommets puisque 2 sommets sont communs aux faces CLKGFD et BCLINM (les sommets C et L). Le même processus se poursuit pour le décompte des sommets de la 4^e face hexagonale (DFERQA) qui aura 2 sommets à compter, puisque les 4 autres sont des sommets partagés de la 1^{re} et 3^e faces (sommets A, Q, D et F). Ainsi, le décompte des sommets de la partie « supérieure » de l'octaèdre tronqué sera de 16 sommets.

Il reste à continuer le processus pour les 4 autres faces de la partie « inférieure » de l'octaèdre (une 2^e pyramide droite à base carrée). La 5^e face hexagonale (TPOXUS) pourrait être celle adjacente à la 1^{re} face (ABMPTQ). Le décompte des sommets de cette face fournira 4 sommets, puisque la face TPOXUS et la face ABMPTQ ont 2 sommets en commun (T et P). Ensuite, le décompte des sommets de la 6^e face hexagonale (NOXWJI) aura 2 sommets puisque 4 sommets ont déjà été comptés avec les faces BCLINM et TPOXUS, soit les sommets O, X, I et N. La 7^e face hexagonale (KGHVWJ) aura 2 sommets à compter, car les 4 autres ont déjà été comptés puisqu'ils sont communs aux faces NOXWJI et CDFGKL, soit les sommets G, K, J et W. Le nombre de sommets à compter dans la 8^e face hexagonale (REHVUS) sera de 0 puisque les 8 sommets sont communs avec les 7 autres faces. Quant aux sommets des 4 faces carrées, ils ont déjà été comptés, car ces sommets sont communs avec les faces hexagonales. Ainsi, pour la partie « inférieure » de l'octaèdre tronqué, le décompte sera de 8 sommets. Finalement, en faisant le décompte total

des sommets de la partie « supérieure » et de la partie « inférieure » de l'octaèdre tronqué, l'élève obtiendra 24 sommets.

Mais certains élèves pourraient procéder de façon plus directement analytique, en constatant que la troncature a pour effet de remplacer chacun des 6 sommets de l'octaèdre initial par les 4 sommets du carré le long duquel on coupe. Comme aucun sommet n'apparaît autrement, il y a donc exactement $6 \times 4 = 24$ sommets en tout.

Une 3^e manière de procéder au décompte des sommets serait pour l'élève d'utiliser un crayon de couleur de type « surligneur » et de colorier chaque nouveau sommet obtenu avec la troncature (même raisonnement que la 2^e façon), à condition que le dessin de départ ait été réalisé convenablement, c'est-à-dire que les arêtes soient dessinées aux bons endroits sur l'octaèdre fourni avec le questionnaire.

Pour procéder ensuite au décompte des arêtes, l'élève visualisera que la face hexagonale ABMPTQ possèdera 6 arêtes, la 2^e face hexagonale BCLINM aura 5 arêtes — une de moins que la 1^{re} face puisqu'une de ces arêtes sera commune aux 2 faces (arête BM), puis la 3^e face hexagonale CLKGFD contiendra 5 arêtes — arête commune CL aux 2^e et 3^e faces ; la 4^e face hexagonale ADFERQ 4 arêtes — deux arêtes communes aux 1^{re} et 3^e faces, soit les arêtes AQ et DF. Pour la partie inférieure du solide tronqué : la 5^e face hexagonale TPOXUS aura 5 arêtes — arête TP commune avec la face ABMPTQ, la 6^e face hexagonale NOXWJI aura 4 arêtes — arêtes communes OX et IN des 5^e et 2^e faces, la 7^e face hexagonale GKJWVH aura 4 arêtes — arêtes communes GK et JW aux 3^e et 6^e faces et la 8^e face hexagonale REHVUS aura 3 arêtes — arêtes communes RE, SU et HV aux 4^e, 1^{re} et 7^e faces. En tout, l'octaèdre tronqué possèdera 36 arêtes.

Comme pour les faces et les sommets, on peut aussi analyser la situation : chacune des 12 arêtes de l'octaèdre initial reste une arête (même si elle est « écourtée » à chaque bout !) dans l'octaèdre tronqué. Mais à cela il faut ajouter 4 arêtes comme côtés de chacun des carrés obtenus par troncature, et on a vu qu'il y avait 6 tels carrés qui apparaissent après troncature. On a donc en tout $12 + (6 \times 4) = 36$ arêtes.

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 2 – question b :

La réussite de la *question b* est intimement liée à la réussite de la *question a*. En effet, pour être capable de voir, d'identifier et de compter le nombre de faces et d'arêtes formées à la suite de la troncature de l'octaèdre, l'élève doit d'abord visualiser mentalement la forme des faces et la structuration des arêtes résultant de la troncature.

En conséquence, la difficulté majeure concerne d'une part, la visualisation directe à partir du dessin 2D de l'octaèdre, c'est-à-dire de bien identifier les sections de coupe dans l'octaèdre ; et d'autre part, cela concerne la visualisation interne par la création d'images mentales des nouvelles faces de l'octaèdre tronqué (carrés et hexagones) ainsi que la compréhension de la relation d'incidence des arêtes.

Une autre difficulté a trait à la décomposition par déconstruction dimensionnelle des formes de l'octaèdre tronqué. Il s'agit en fait de déterminer les figures 2D présentent dans une figure 3D, c'est-à-dire les faces bidimensionnelles formant le solide qu'est l'octaèdre tronqué. Dans un premier temps, dans la perception spatiale d'une figure complexe telle l'octaèdre tronqué, les élèves percevront la figure 3D (octaèdre tronqué) plutôt que les figures 2D. Puis, la visualisation spatiale entrera en jeu plus spécifiquement en s'attachant aux parties de la figure 3D, dont les faces. De plus, la structuration et l'organisation des faces de l'octaèdre tronqué se réaliseront mentalement par l'élève de manière concomitante avec la visualisation du squelette 2D de la figure 3D, c'est-à-dire l'organisation des arêtes entre elles, avec la compréhension des relations d'incidence qu'en aura l'élève au moment d'effectuer la tâche.

Question c : Dessine un développement plan de ce nouveau polyèdre.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent répondre clairement à la question en dessinant un développement plan du nouveau polyèdre résultant. Nous anticipons que cette question sera difficile pour la majorité des élèves, même pour ceux ayant une bonne capacité de visualisation spatiale, notamment parce qu'ils ne sont pas habitués à faire des représentations complexes de solides en développement plan.

Comment doivent-ils procéder?

Les élèves pourraient utiliser leurs connaissances spatiales antérieures, à savoir comment dessiner un développement plan d'un solide. Les caractéristiques d'un développement plan ont été présentées dans notre problématique (voir section 1.3.2, partie 3).

Voici deux développements plans possibles du nouveau polyèdre créé par la troncature de l'octaèdre dans un rapport $k = \frac{1}{3}$:

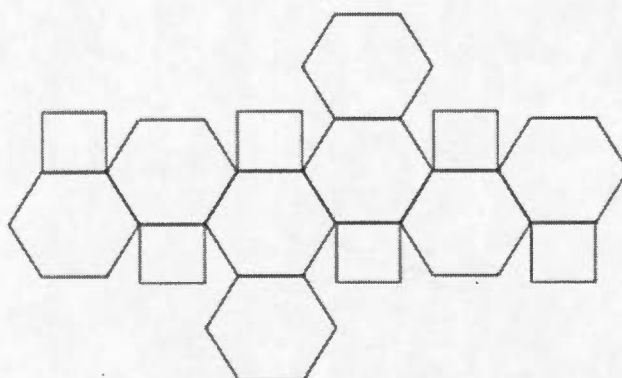


Figure 3.12a Un premier développement plan possible de l'octaèdre tronqué
(Source: http://cyrille.nathalie.free.fr/math/mathcurve/octaedre_tronque.shtml.htm)

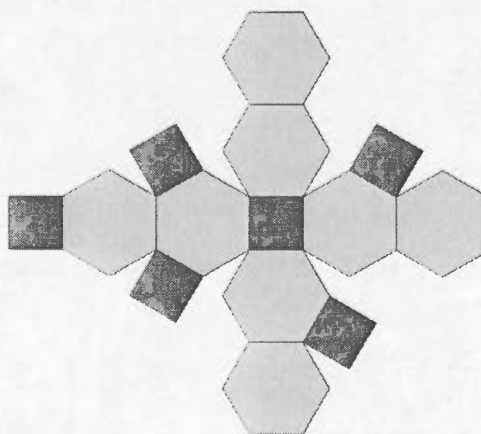


Figure 3.12b Un deuxième développement plan possible de l'octaèdre tronqué
(Source: http://fr.wikipedia.org/wiki/Octa%C3%A8dre_tronqu%C3%A9)

Un « bon » élève va analyser mentalement le solide créé sans faire aucune manipulation concrète et sans voir l'objet physique tridimensionnel devant lui. Son raisonnement pour produire le développement plan de l'octaèdre tronqué est basé sur la structure mathématique de ses éléments, incluant les propriétés qu'ils ne voient pas, avec l'aide additionnelle du solide illustré par le dessin du questionnaire.

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 2 – question c :

L'analyse de la nouvelle figure (octaèdre tronqué) se réalise d'abord au niveau de la perception spatiale, c'est-à-dire en fonction des formes que l'on reconnaît et des propriétés visuelles de ces formes. L'exemple d'un octaèdre tronqué résulte d'une organisation comparable à la résolution d'un problème de construction en géométrie plane ; en particulier, la découverte d'un algorithme d'assemblage peut supposer une déconstruction dimensionnelle.

Afin d'expliquer notre raisonnement sur le processus de visualisation interne, nous avons réalisé un dessin en perspective cavalière de l'octaèdre — à gauche dans la figure 3.13 — dont les arêtes BC, NI et XV sont parallèles (toutefois, il faut imaginer une rotation de quelques degrés dans le sens antihoraire) au plan frontal de la feuille de papier et, à droite, nous avons produit une représentation en développement plan de l'octaèdre tronqué.

Une première difficulté est que l'élève ne puisse pas bien voir les faces cachées résultant de la troncature, plus précisément 2 faces carrées parmi les 6 (faces QRST et EFGH) ainsi que 4 faces hexagonales parmi les 8 (faces ABMPTQ, ADFERQ, REHVUS, PTSUXO). À la figure 3.13, les 2 faces cachées carrées sont pointées par des flèches et les 4 faces hexagonales cachées ont une étoile.

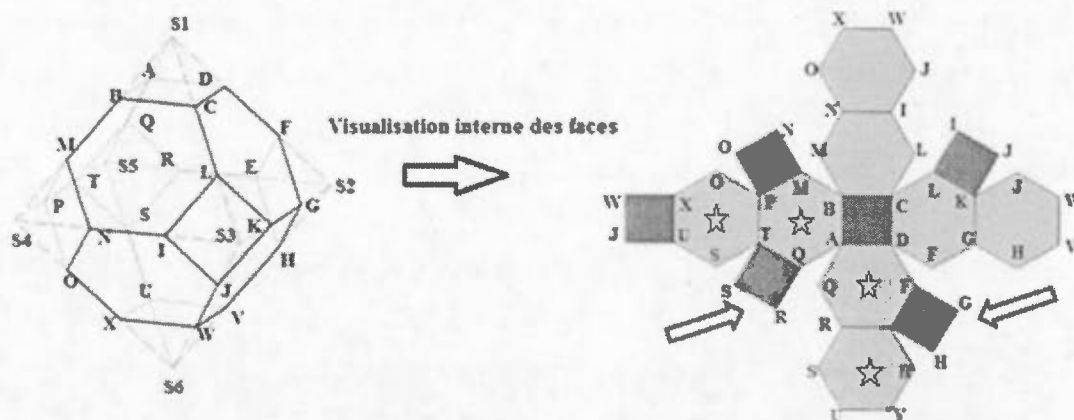


Figure 3.13 Visualisation interne des faces cachées (carrés et hexagones) de l'octaèdre tronqué

Tel que nous l'avons expliqué antérieurement (voir *question c* de la tâche 1), la représentation des objets 3D par les dessins 2D des développements plans est directement liée à la capacité des élèves à combiner et analyser les images mentales. En effet l'élève part d'une des faces qu'il dessine d'abord, par exemple cela pourrait être la face carrée ABCD. Ensuite, il devra décomposer mentalement le solide pour voir quelles autres faces lui sont adjacentes, le long de l'arête AB ajouter la face hexagonale ABMPTQ, le long de l'arête BC ajouter la face hexagonale BCLINM, le long de l'arête CD ajouter la face CDFGKL, le long de l'arête AD ajouter la face hexagonale ADFERQ. De même, à partir d'une des faces hexagonales dessinées, continuer le processus pour ajouter les faces une à une jusqu'à ce que toutes les faces soient épuisées (6 faces carrées et 8 faces hexagonales) et dessinées dans le développement. En conséquence, il y a donc avant tout un processus de déconstruction dimensionnelle qui relève de la visualisation interne, mais aussi une visualisation externe (directe) à travers laquelle l'élève repère sur le solide les arêtes partagées par deux faces, les sommets partagés par plusieurs arêtes, et les positions relatives de ces éléments.

Il y a aussi des informations spatiales à prendre en compte, soit des éléments de connaissances spatiales, soit des éléments provenant de la visualisation spatiale (externe et interne), que les élèves doivent encoder ou interpréter correctement au moment de l'élaboration du développement plan de l'octaèdre tronqué. Afin de bien nous faire

comprendre, nous allons exposer d'autres exemples d'informations spatiales à prendre en considération, à partir de la figure 3.13:

✓ Éléments de connaissances spatiales

▪ Alignement des sommets

- les points S_1 , A, Q et S_5 sont alignés, car ils appartiennent à la droite S_1S_5
- les points S_1 , B, M et S_4 alignés sur la droite S_1S_4
- les points S_1 , C, L, S_3 appartiennent à la droite S_1S_3
- les points S_1 , D, F, S_2 appartiennent à la droite S_1S_2
- etc.

▪ Incidence des arêtes

- les arêtes S_1A , AQ et QS_5 sont incidentes deux à deux (parce qu'elles partagent respectivement le point A et le point Q) et sont portées par la droite S_1S_5
- les arêtes S_1B , BM et MS_4 sont incidentes deux à deux (parce qu'elles partagent respectivement le point B et le point M) et sont portées par la droite S_1S_4
- les arêtes S_1C , CL et LS_3 sont incidentes deux à deux (parce qu'elles partagent respectivement le point C et le point L) et sont portés par la droite S_1S_3
- les arêtes S_1D , DF et FS_2 sont incidentes deux à deux (parce qu'elles partagent respectivement le point D et le point F) et sont portés par la droite S_1S_2
- etc.

▪ Coplanarité de certaines faces plus faciles à visualiser par exemple :

- la face triangulaire S_1BC , la face hexagonale BCLINM, la face triangulaire MNS_4 , la face triangulaire LIS_3 sont incluses dans le plan $S_1S_3S_4$;

✓ Éléments de visualisation spatiale (externe et interne)

La relation de coplanarité s'appliquant à certaines faces qui, en plus, sont difficiles à visualiser parce qu'elles sont cachées dans la représentation 2D et dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D par exemple : la face

triangulaire S_1AB , la face hexagonale $BAQTPM$, la face triangulaire MPS_4 , la face triangulaire QS_5T sont incluses dans le plan $S_1S_4S_5$ et dont les angles BAS_1 , TS_5Q , S_4PM sont isométriques dans la réalité, mais non représentés isomorphiquement en 2D.

Question d : *Représente, avec la règle usuelle de 30 cm, ce nouveau solide sur une feuille de papier, en perspective cavalière et en perspective à 1 point de fuite.*

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent dessiner le nouveau solide créé en perspective cavalière. Nous anticipons qu'ils éprouveront des difficultés parce que la représentation de l'octaèdre tronqué en perspective cavalière exige une visualisation interne hautement sophistiquée, entre autres à cause des faces cachées dans la représentation de l'objet 3D, car elles exigent la coordination de plusieurs mouvements de rotation selon des axes différents et une perception mentale sûre de la structuration 3D du solide initial (octaèdre).

Comment doivent-ils procéder?

D'abord, concrètement, l'élève devrait reproduire l'octaèdre exactement comme il le voit sur la feuille du questionnaire, pouvant même aller jusqu'à le décalquer. Ensuite, il effacera des bouts d'arêtes une à une pour reproduire les « coupes », en ajoutant à mesure les arêtes qui joignent les nouveaux sommets apparaissant ainsi.

Qui plus est, l'élève devrait se servir du dessin 2D fourni sur le questionnaire (octaèdre) et utiliser sa compétence de visualisation mentale, combinée à certains éléments de connaissances spatiales telles que les relations d'incidence, d'adjacente et de parallélisme dans l'espace. Nous allons analyser de façon détaillée ces éléments :

1) la relation d'incidence

Dans la représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué, la relation d'incidence concerne spécifiquement les arêtes et les faces entre elles. Par exemple, dans la figure 3.14, les sommets S_1 et S_2 sont incidents parce qu'ils sont situés sur la droite S_1S_2 . De plus, les sommets S_1 , S_2 et S_3 appartiennent au même plan passant par ces points, ils sont donc incidents à ce plan.

Cette relation sera donc nécessaire afin de bien distinguer les points (sommets entre autres) et les plans incidents ou non entre eux dans l'application adéquate des règles de la perspective cavalière que nous avons explicitées dans notre cadre théorique.

Qui plus est, il y a un lien étroit entre la représentation en développement plan de l'octaèdre tronqué et sa représentation en perspective cavalière. En effet, une compréhension adéquate de la relation d'incidence se manifestant dans l'élaboration du développement plan assurera chez l'élève une visualisation interne plus efficace des images mentales des 6 faces carrées et des 8 faces hexagonales et leur structuration dans l'espace. Ainsi, en procédant par pliage des faces adjacentes entre elles le long de telles arêtes, l'élève arrivera à reconstruire mentalement l'octaèdre tronqué.

En ce qui concerne l'élaboration du dessin en perspective cavalière, d'abord, l'élève devra décomposer mentalement l'octaèdre en deux pyramides droites régulières à base carrée. Ensuite, il devra représenter la base carrée commune – qui sera dessinée sous la forme d'un parallélogramme – aux pyramides passant par les sommets S_2 , S_3 , S_4 et S_5 , et selon une rotation d'environ 30° par rapport au plan frontal de la feuille de papier. Nous croyons que cette rotation sera utile à l'élève pour mieux faire « apparaître » dans le dessin les faces cachées de l'octaèdre tronqué, soit les faces hexagonales CDFGKL, ADFERQ, GKJWVH, PTSUXO ainsi que les faces carrées QRST, EFGH.

Une 2^e règle de la perspective cavalière exige que les fuyantes soient toutes du même côté de la face frontale et qu'elles soient parallèles entre elles. Cela nous amène au point suivant.

2) la relation de parallélisme dans l'espace

Une fois que seront dessinées les faces triangulaires de l'octaèdre, soit les faces $S_1S_2S_3$, $S_1S_2S_5$, $S_1S_4S_5$, $S_1S_3S_4$, $S_6S_2S_3$, $S_6S_3S_4$, $S_6S_4S_5$ et $S_6S_2S_5$, l'élève devra imaginer mentalement les sections de coupes formant les 6 carrés des bases des « petites » pyramides droites à base carrée qui seront détachées de l'octaèdre. Lorsqu'il va procéder à leur représentation, il lui sera très utile d'utiliser la relation de parallélisme dans l'espace, plus spécifiquement la relation des plans parallèles deux à deux, soit : le plan MNOP avec le plan EFGH, le plan ABCD avec le plan UVWX et finalement le plan IJKL avec le plan QRST. La compétence à visualiser par des images mentales ces plans sera très difficile à mettre en œuvre par l'élève à cause de certaines parties cachées (faces, sommets ou arêtes). Il pourra surmonter en partie cette difficulté en complétant par des traits en pointillés ces parties cachées, pour ainsi voir apparaître la représentation finale de l'octaèdre tronqué.

Voici notre représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué :

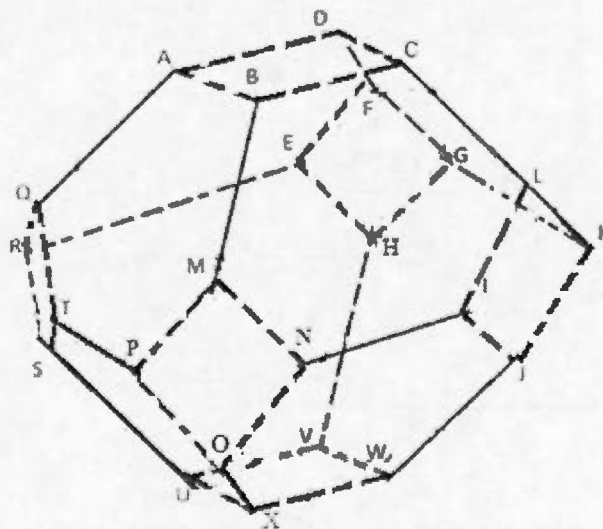


Figure 3.14 Représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué

En ce qui concerne la représentation en perspective à 1 point de fuite, l'élève doit d'abord se servir du dessin 2D fourni (octaèdre) et utiliser la compétence de visualisation interne en

créant des images de modélisation des faces de l'octaèdre tronqué et leur organisation dans l'espace. Une fois qu'il les aura organisées, il pourra se construire une image mentale globale de la forme de l'octaèdre tronqué à dessiner en 2D.

Nous anticipons que l'élève fasse des allers-retours fréquents entre la production de sa représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué et ses images mentales de modélisation qu'il aura créées, puis modifiées et réorganisées au besoin. En conséquence, nous anticipons que les représentations 2D des élèves nous révéleront des éléments de réponse pour les 2^e et 3^e questions de recherche.

De plus, cette visualisation mentale doit se produire de manière concomitante avec certains éléments de connaissances spatiales telles que les relations d'incidence, d'adjacente et de parallélisme dans l'espace, que nous avons explicité antérieurement.

Voici la solution d'une représentation en perspective à 1 point de fuite :

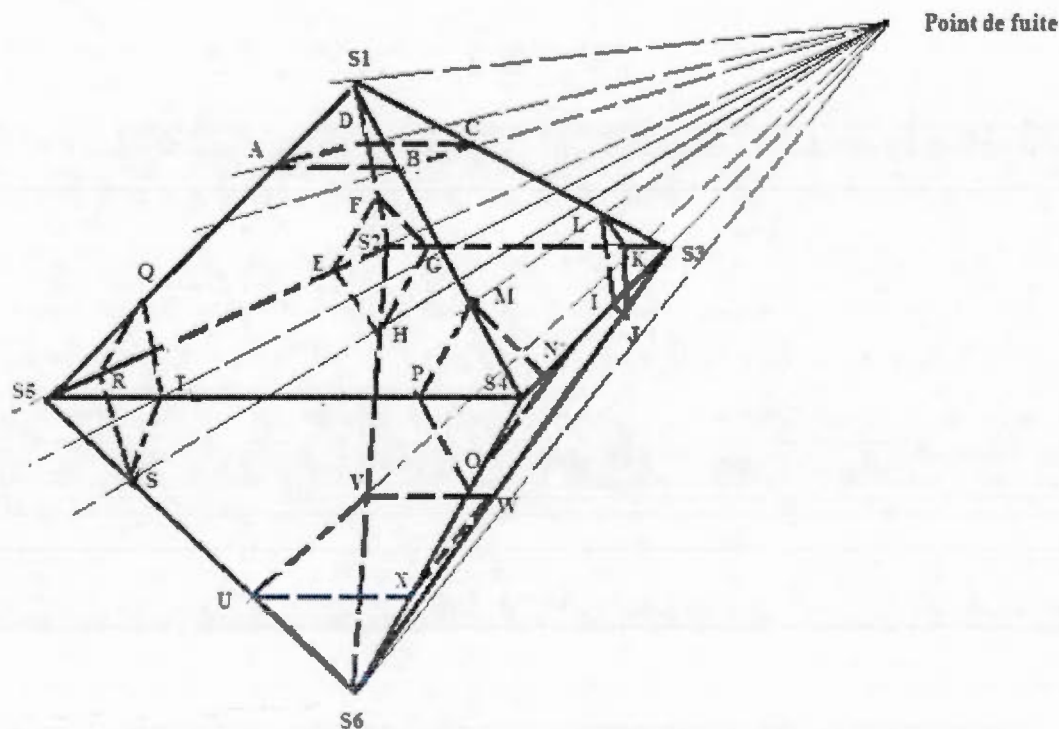


Figure 3.15 Représentation en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué

Nous anticipons que la réussite à cette question sera faible parce que d'une part, les élèves ne sont pas habitués à l'école secondaire à dessiner des objets de l'espace de cette complexité et d'autre part, cette tâche exige une maîtrise élevée de la compétence à visualiser mentalement l'objet 3D.

Difficultés ou obstacles qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 2 – question d :

- 1) Nous anticipons que la difficulté majeure pour réaliser la représentation en perspective cavalière sera la visualisation interne à partir du dessin 2D de l'octaèdre non tronqué et par suite, de ce qui résulte de la troncature. En fait, c'est à la base la même difficulté pour la visualisation interne dans l'élaboration du développement plan de l'octaèdre tronqué, dont nous avons parlé à la *question c*, à savoir la capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D.
- 2) Dès lors, nous pouvons dire que la visualisation externe et la visualisation interne du dessin 2D de l'octaèdre non tronqué auront pour rôle de compléter la perception spatiale du dessin 2D. Nous avons montré dans notre cadre théorique (voir section 2.2.1) que la perception spatiale s'exerce de manière exploratoire par le biais physique de l'œil, de la main et même du corps entier. De plus, ce que nous percevons spatialement ne donne jamais une vision complète de l'objet 3D parce que nous ne percevons globalement la forme d'un objet 3D que de manière spécifique. Voilà pourquoi la visualisation ne doit pas être réduite à la perception spatiale, à savoir que la visualisation rend visible tout ce qui n'est pas accessible à la perception spatiale, telle que les faces cachées (carrés et hexagones) résultant de la troncature de l'octaèdre.
- 3) La « coordination » entre les images mentales produites par l'élève avec l'acte de produire une représentation en perspective cavalière constituera une autre difficulté. Nous entendons par coordination l'harmonisation entre la visualisation des images mentales avec la production du dessin 2D de l'objet 3D. Il y aura donc

des « allers retour » fréquents entre les images mentales et la production du dessin 2D de ces images.

De plus, il y aura une difficulté supplémentaire, qui se produira entre la compréhension des relations d'incidence et de parallélisme des arêtes et faces de l'octaèdre tronqué, dont nous avons discuté antérieurement (voir questions c et d), avec le recours à la visualisation interne de ces arêtes et de ces faces.

Voici les difficultés pouvant survenir dans la représentation en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué (voir figure 3.15) :

Une première difficulté sera de dessiner dans le plan frontal, c'est-à-dire le plan parallèle au plan de la feuille. Dans le programme de mathématiques de 3^e secondaire, les solides à représenter en perspective à un point de fuite se limitent à des cas simples où les règles de cette technique sont faciles à maîtriser. Par exemple, la 1^{re} face à dessiner qui est parallèle au plan frontal de la feuille de papier est toujours une figure plane (carré, rectangle, triangle, disque, etc.) Or, en ce qui concerne l'octaèdre tronqué, il n'y a pas de face du solide qui soit parallèle au plan frontal de la feuille de papier ; en effet, seule l'arête S_4S_5 est parallèle au plan frontal.

Une deuxième difficulté concerne l'emplacement du point de fuite. L'élève sait qu'il peut le placer n'importe où sur sa feuille de papier. À notre avis, ce qui pose problème, c'est que ce point de fuite ne doit pas être placé trop proche du dessin 2D puisqu'il en résulterait une représentation avec des ambiguïtés quant à la forme des faces, c'est-à-dire des déformations éventuelles. Mais il ne peut pas être placé trop loin non plus, pour les mêmes raisons.

Une troisième difficulté concerne le dessin des 6 « petites » pyramides qui seront « détachées » à la suite de la troncature de l'octaèdre. En effet, les plans de coupe sont difficiles, d'une part à visualiser mentalement à cause des parties cachées et d'autre part, à dessiner en respectant les conventions de la perspective à 1 point de fuite.

Question e : *Calcule le volume résultant formé par le nouveau solide, sachant que la mesure du côté d'un des triangles équilatéraux dans le polyèdre de départ est de 6 cm.*

La solution : **identification des connaissances spatiales nécessaires**

Consignes à respecter : les élèves doivent répondre clairement à la question posée en déterminant la valeur du volume du nouveau solide créé. Cela se produira par la visualisation puis par une résolution algébrique à l'aide de la formule de volume de la pyramide droite régulière à base carrée.

Comment doivent-ils procéder?

Les élèves vont se servir de leurs connaissances antérieures, à savoir :

- ✓ savoir utiliser la bonne formule de volume pour ce nouveau solide. Toutefois, la formule du volume de l'octaèdre tronqué n'étant pas enseignée au secondaire, les élèves devront décomposer l'octaèdre tronqué en deux pyramides droites régulières à base carrée juxtaposées le long de leurs bases carrées, puis tenir compte de la troncature produisant six « petites » pyramides droites régulières à base carrée ; ce qui signifie qu'ils devront utiliser la formule de volume de la pyramide droite à base carrée pour calculer les volumes de ces pyramides et les retrancher ;
- ✓ déterminer la mesure de l'arête tronquée en procédant au calcul $\frac{1}{3} \times 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$. Cela signifie que l'arête de la « petite » pyramide droite à base carrée sera de 2 cm ;
- ✓ déterminer où sera positionnée la hauteur d'une pyramide droite à base carrée abaissée perpendiculairement du sommet (apex) de la pyramide au centre du carré qui en constitue la base ;
- ✓ se représenter mentalement où est positionné le « demi-côté » de la base carrée (segment C1PM, voir figure 3.16) ;
- ✓ repérer la face latérale d'un des triangles formant une petite pyramide à base carrée afin de déterminer la valeur de la mesure de l'apothème de cette petite pyramide :

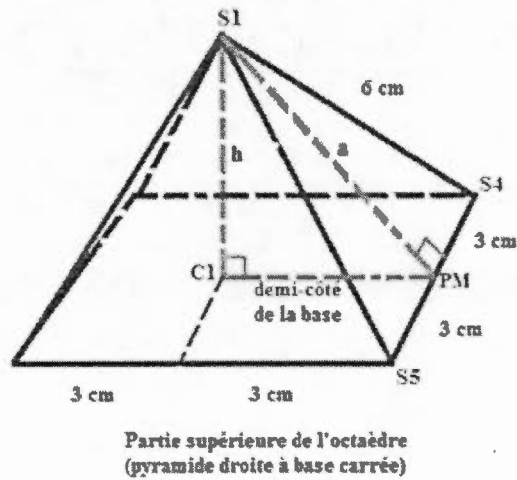


Figure 3.16 Partie supérieure de l'octaèdre (pyramide droite à base carrée)

$$\begin{aligned}
 \text{mesure apothème (pyramide)} &= a = \sqrt{6^2 - 3^2} \\
 &= \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ cm} \\
 &\approx 5,96 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

- ✓ utiliser des connaissances spatiales sur les angles intérieurs dans un triangle équilatéral, à savoir que chacun des angles mesure 60° ;
- ✓ utiliser une propriété des angles, à savoir que les angles S_1APM_1 et S_1S_5PM sont correspondants parce que les droites AB et S_5S_4 qui sont parallèles sont coupées par une droite sécante, soit la droite S_1S_5 . Ainsi, $m\angle S_1APM_1 = m\angle S_1S_5PM = 60^\circ$.
- ✓ Déterminer, par similitude de facteur $\frac{1}{3}$, la mesure d'un côté de la « petite » pyramide qui est détachée de l'octaèdre tronqué comme suit :

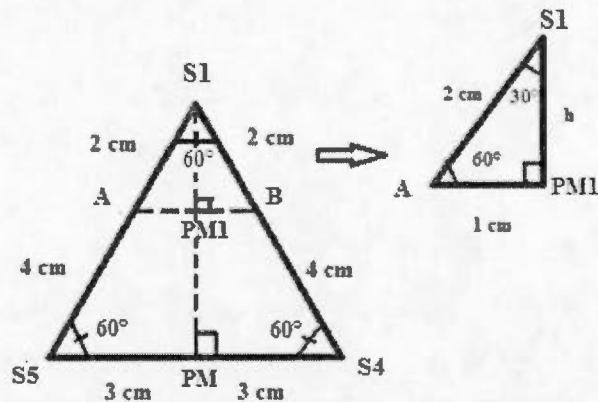


Figure 3.17 Calcul de la mesure d'un des côtés de la petite pyramide

Ici, l'élève va utiliser une propriété mathématique ancrée dans ses connaissances antérieures, à savoir : dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un angle de 30° vaut la moitié de la mesure de l'hypoténuse. Bref, $m_{APM_1} = 1 \text{ cm}$.

✓ calculer le volume d'une des 6 « petites pyramides » à base carrée:

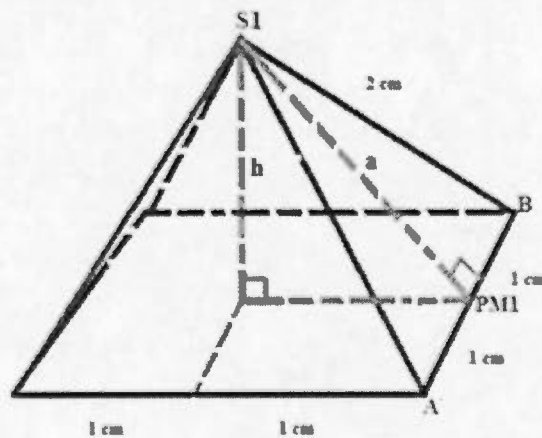


Figure 3.18 Agrandissement d'une des « petites » pyramides à base carrée

$$\text{apothème de la « petite » pyramide} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \approx 1,73 \text{ cm}$$

$$\text{hauteur de la « petite » pyramide} = h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \approx 1,41 \text{ cm}$$

$$\text{Volume "petite" pyramide} = \frac{\text{Aire base} \times \text{hauteur}}{3}$$

où c représente la mesure du côté du carré et h , la hauteur du solide

$$\text{Volume "petite" pyramide} = \frac{c^2 \times h}{3} = \frac{2^2 \times \sqrt{2}}{3} \approx 1,886 \text{ cm}^3$$

✓ *Calculer le volume de l'octaèdre*

L'élève se servira d'une connaissance spatiale antérieure généralement traitée en secondaire 1 et 2 par nos collègues enseignants, à savoir qu'un octaèdre peut être considéré comme la juxtaposition le long de leur base de 2 pyramides régulières droites à base carrée. Toutefois, l'élève pourrait aussi le visualiser. Ainsi, le volume de l'octaèdre sera égal au volume des ces 2 pyramides droites régulières à base carrée.

✓ Déterminer le volume d'une pyramide droite régulière à base carrée comme suit :

- l'apothème de la pyramide a déjà été calculé, soit $a \approx 5,196 \text{ cm}$
- déterminer la valeur de la mesure de la hauteur de la pyramide

$$h_{\text{pyramide}} = \sqrt{5,196^2 - 3^2} \approx 4,242 \text{ cm}$$

- calculer le volume d'une pyramide à base carrée :

$$\text{volume pyramide} = \frac{c^2 \times h}{3} = \frac{6^2 \times 4,242}{3} \approx 50,904 \text{ cm}^3$$

✓ Calculer le volume de l'octaèdre

Le volume de l'octaèdre sera égal au volume des deux pyramides à base carrée

$$\text{Volume Octaèdre} = 2 \times 50,904 \text{ cm}^3 \approx 101,808 \text{ cm}^3$$

✓ Calculer le volume des 6 petites pyramides à base carrée

$$\text{Volume 6 petites pyramides} = 6 \times 1,886 \text{ cm}^3 \approx 11,316 \text{ cm}^3$$

✓ Déterminer le volume de l'octaèdre tronqué par soustraction de volume :

$$\text{Volume octaèdre tronqué} = \text{Volume octaèdre} - \text{Volume 6 petites pyramides à base carrée}$$

$$\approx 101,808 \text{ cm}^3 - 11,196 \text{ cm}^3 \approx 90,612 \text{ cm}^3$$

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 2 – question e :

Une première difficulté est que l'élève doit faire usage d'un dessin 2D (décomposition du solide « octaèdre tronqué »), que ce soit un croquis à main levée ou une représentation en perspective cavalière, pour l'aider d'une part à bien visualiser où sont situés les éléments de la formule de volume de la pyramide droite à base carrée dans la représentation spatiale — repérer spatialement le tiers de l'arête du triangle équilatéral, repérer la mesure du côté d'une « petite » pyramide, son apothème et sa hauteur — et d'autre part, compléter son raisonnement et calculer le volume des solides de la tâche.

D'autres difficultés concernent la perception et la visualisation spatiales des dimensions des solides décomposables :

- ✓ Percevoir spatialement que l'octaèdre régulier dessiné sur sa copie est constitué de deux solides décomposables équivalents, soit deux pyramides droites à base carrée dont les faces sont des triangles équilatéraux dont les côtés correspondent à l'arête mesurant 6 cm.
- ✓ Repérer spatialement où se fait la troncature au tiers de chaque arête.
- ✓ Utiliser la capacité de visualisation interne (voir cadre théorique, section 2.1.1), des six « petites » pyramides à base carrée qui seront détachées de l'octaèdre tronqué.
- ✓ Difficulté à repérer les éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale qu'ils auront à dessiner : les apothèmes des « grandes » et des « petites » pyramides, de même que leurs hauteurs respectives (confusion hauteur-arête et confusion hauteur-apothème) puis, calculer les mesures de ces apothèmes et de ces hauteurs en utilisant le théorème de Pythagore.

- ✓ Difficulté à se faire une image mentale organisée de la hauteur abaissée d'un point sur un plan, c'est-à-dire, voir les angles droits en 3D aux bons endroits dans le dessin et utiliser la relation de Pythagore pour trouver une mesure manquante.

D'autres difficultés se présenteront dans le calcul du volume :

- ✓ Déterminer la mesure d'un côté des six « petites » pyramides droites à base carrée à la suite de la troncature de l'octaèdre.
- ✓ Difficulté dans l'application de la relation de Pythagore dans l'espace.
- ✓ Utiliser ces deux théorèmes de géométrie plane sur les triangles rectangles qui s'énoncent comme suit :
 - « Dans un triangle rectangle, la valeur de la mesure du côté opposé à un angle de 30° vaut la moitié de celle de l'hypoténuse ».
 - « Dans un triangle isocèle (et en particulier dans un triangle équilatéral), la hauteur et la médiane issues du sommet qui partagent les deux côtés isométriques coïncident ».
- ✓ Application erronée dans les formules de volume de la pyramide (difficulté de se rappeler de la bonne formule) : par exemple, oublier de diviser par 3 dans la formule de volume, oublier de diviser par 2 dans la formule d'aire du triangle.

3.4.3 Analyse *a priori* de la tâche 3 : la tour décomposable

Question a : Calcule les dimensions de chaque pièce et leur volume respectif

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent répondre clairement à la question posée en indiquant les dimensions de chaque pièce (cylindre droit, cube, prisme droit à base rectangulaire et pyramide droite à base carrée). Ils doivent aussi déterminer le volume de chaque pièce qui compose la tour.

Comment doivent-ils procéder ?

Premièrement, nous avons indiqué aux élèves que lorsqu'ils auront déterminé les mesures manquantes de chaque solide, ils devront passer à l'étape des représentations en perspective cavalière. Pour le prisme droit régulier à base rectangulaire, une de ses faces reposera sur une face du cube.

Les élèves vont se servir de leurs connaissances antérieures, telles que les formules d'aires et de volume des solides usuels (cylindre droit, cube, prisme à base carrée, prisme à base rectangulaire, pyramide).

Solution avec la démarche algébrique adéquate :

- ✓ Aire de la base du cube = Aire de la base rectangulaire du prisme = Aire de la base du cylindre = Aire de la base de la pyramide

$$\text{Aire de la base du prisme rectangulaire} = 21,6 \text{ dm} \times 15 \text{ dm} = 324 \text{ dm}^2$$

- ✓ Aire de la base prisme rectangulaire = Aire de la base du cube
 $324 = c^2$, où c représente la mesure de l'arête du cube

$$\sqrt{324} = c \Rightarrow c = 18 \text{ dm},$$

donc la mesure du côté de la base du cube vaut 18 dm.

- ✓ Aire de la base du prisme rectangulaire = Aire de la base de la pyramide à base carrée

$$324 = c^2$$

$$\sqrt{324} = c \Rightarrow c = 18 \text{ dm},$$

donc la mesure du côté de la base de la pyramide à base carrée vaut 18 dm.

- ✓ Aire de la base du prisme rectangulaire = Aire de la base du cylindre
 $324 = \pi \times r^2$, où r représente le rayon du disque,

$\sqrt[2]{324/\pi} = r \Rightarrow r \approx 10,155 \text{ dm}$, donc la mesure du rayon du cylindre vaut 10,155 dm.

Les élèves se serviront de la deuxième affirmation : des solides sont dits équivalents s'ils ont le même volume.

Solution avec la démarche algébrique adéquate :

- ✓ Volume du cube = Volume du cylindre = Volume de la pyramide à base carrée = Volume du prisme droit à base rectangulaire

- ✓ Calcul de la mesure du côté du cube

Volume du cube = $c^3 = 18^3 = 5832 \text{ dm}^3$, où c représente la mesure de l'arête du cube.

- ✓ Volume du prisme à base rectangulaire = Aire base $\times h$ = Volume Cube, où h , représente la hauteur du prisme.

$$(21,6 \times 15) h = 5832 \Rightarrow h = (5832/324) = 18 \text{ dm.}$$

- ✓ Volume du cube = Volume de la pyramide à base carrée

$$5832 = \frac{\text{Aire base} \times h}{3} = \frac{c^2 \times h}{3},$$

où $h_{(\text{prisme})}$ représente la hauteur de la pyramide.

$$5832 = \frac{18^2 \times h(\text{prisme})}{3} \Rightarrow h(\text{prisme}) = \frac{3 \times 5832}{18^2} = 54 \text{ dm.}$$

- ✓ Volume du cube = Volume du cylindre

$$5832 = \text{Aire base} \times h(\text{cylindre}) = \pi \times r^2 \times h(\text{cylindre})$$

où $h_{(\text{cylindre})}$ et r sont respectivement la hauteur et le rayon du cylindre.

$$5832 \times 10,155^2 \times h(\text{cylindre}) \Rightarrow h(\text{cylindre}) = \frac{5832}{\pi \times 10,155^2} = 18,001 \text{ dm.}$$

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 3 – question a

Une première difficulté a trait à une bonne application des deux indices fournis pour résoudre algébriquement cette tâche. Ensuite, les élèves doivent déterminer une mesure

manquante par calcul algébrique. Nous n'anticipons pas de difficultés majeures dans cette démarche algébrique.

En ce qui concerne la deuxième définition à savoir que des solides sont dits équivalents s'ils ont le même volume, nous anticipons qu'elle soit plus difficile dans son application algébrique à cause de la détermination de mesures manquantes où l'élève est obligé de résoudre des équations linéaires à une variable. Or, dans notre problématique, nous avons exposé que la recherche de mesure manquante dans un problème de volume s'avère une difficulté.

Nous anticipons les difficultés suivantes, dont les deux dernières qui ont été discutées dans notre problématique (voir section 1.2) :

- ✓ confusion dans l'application de la racine cubique et son opération inverse, l'exponentiation à la puissance 3, pour le calcul de l'arête d'un cube ;
- ✓ déterminer une mesure manquante, soit la hauteur de la pyramide droite régulière à base carrée, et calculer sa mesure dans la formule du volume de la pyramide ;
- ✓ déterminer une autre mesure manquante, soit la mesure de la hauteur d'un cylindre droit régulier, et calculer cette mesure à partir de la formule du volume du cylindre.

Question b : Représente, en perspective cavalière, la tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la composent.

La solution : identification des connaissances spatiales nécessaires

Consignes à respecter : les élèves doivent représenter en perspective cavalière les quatre pièces de la tour. Par ordre, de bas en haut, nous devrions voir le cylindre droit régulier, puis le cube, ensuite le prisme droit régulier à base rectangulaire couché sur une face dont le côté est le plus long et finalement, la pyramide droite régulière à base carrée.

Comment doivent-ils procéder ?

Les élèves vont se servir de leurs connaissances antérieures de la perspective cavalière, plus spécifiquement de ses conventions.

Voici la solution de la représentation en perspective cavalière de la tour avec chacune de ses dimensions :

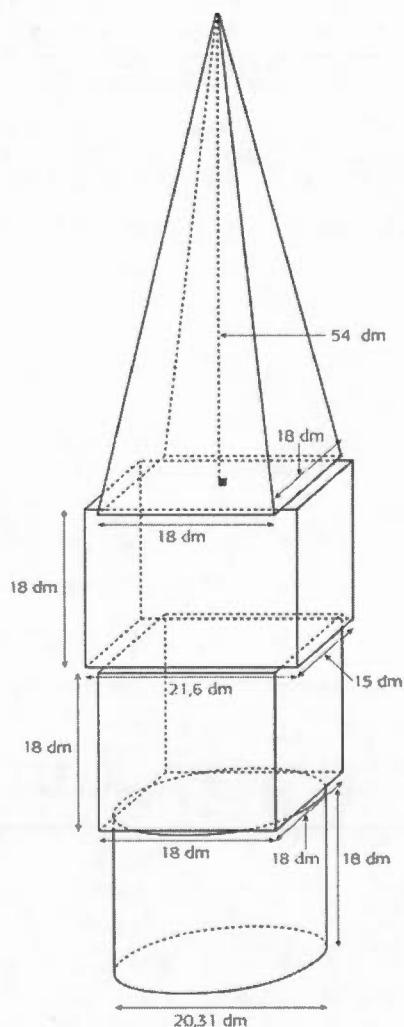


Figure 3.19 Représentation en perspective cavalière de la tour décomposable

Difficultés qui pourraient se présenter dans la réalisation de la tâche 3 – question b:

Une des difficultés majeures auxquelles seront confrontées les élèves concernera la production des représentations en perspective cavalière de chacun des solides composants la tour. Les élèves n'ont pas accès aux objets physiques qu'ils doivent représenter en 2D. Tout ce à quoi ils auront accès, ce sont les vues du dessus des bases des quatre objets 3D. Ils

seront donc dans l'obligation d'utiliser leur compétence de visualisation interne pour créer des images mentales de ces objets.

Les élèves ont à leur disposition le dessin ci-dessous et les consignes qui l'accompagnent. Dans un premier temps, une analyse de l'objet à travers sa représentation doit être réalisée. La clé de la représentation réside dans le repérage des quatre bases représentées en projections orthogonales (vues de dessus).

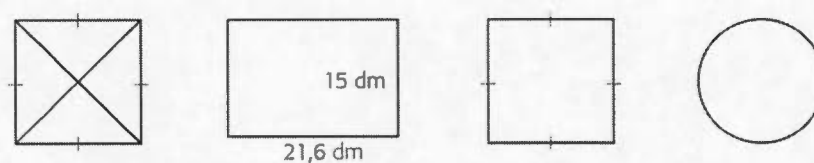


Figure 3.20 Projections orthogonales (vues de dessus) des 4 solides de la tour

Les vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière enlèvent une dimension aux objets, elles provoquent des ambiguïtés, des pertes d'informations. L'élève a besoin la plupart du temps de plus d'une vue pour être capable de représenter adéquatement l'objet 3D ou l'objet physique.

Nous anticipons que le 1^{er} dessin, soit celui du cylindre droit, soit aisé à dessiner en perspective cavalière, car nous avons vérifié dans notre enseignement que les élèves n'éprouvaient pas de difficultés lors d'exercices d'applications en classe. Toutefois, une difficulté se manifestera lors de l'élaboration des autres dessins : l'élève devra s'assurer qu'ils seront centrés correctement sur le cylindre droit.

Une autre difficulté a trait à la conservation du rapport des longueurs des segments parallèles et des autres segments dans les représentations 2D. Certains élèves ne respecteront pas cette propriété ; il en résultera des représentations 2D qui ne seront pas conformes aux conventions de la perspective cavalière.

Dans le prochain chapitre, nous allons présenter les résultats de notre étude ainsi que leur analyse.

CHAPITRE IV

RÉSULTATS ET ANALYSE

Ce chapitre est consacré à la présentation ainsi qu'à l'analyse des résultats de notre recherche. Analyser des apprentissages, c'est avant tout essayer de voir les choses du point de vue de l'élève. Nous précisons que notre analyse devra, dans la mesure du possible, répondre à nos trois questions de recherche :

1. Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volume des solides usuels ?
2. Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?
3. Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

Considérant notre problème de recherche, sa nature ainsi que nos questions de recherche, nous avons choisi d'utiliser le cadre d'analyse du conflit cognitif « *vu/su* » de Parzysz (1988). De plus, nous serons amenés à comparer, voire même à opposer les résultats entre eux et à faire référence à notre cadre théorique ainsi qu'aux travaux antérieurs de la communauté des chercheurs.

4.1 Présentation des résultats de recherche

4.1.1 Perspective retenue : le modèle du conflit cognitif « *vu/su* » de Parzysz (1988)

Selon Parzysz (1988, 1989), « les élèves ne voient pas dans l'espace » et c'est la raison profonde de la difficulté des élèves pour bien comprendre la géométrie dans l'espace. Avant de représenter des objets de l'espace ou de comprendre des représentations qu'on lui propose, l'élève doit avoir développé des capacités de perception spatiale, de visualisation spatiale (externe et interne) ainsi que des connaissances spatiales.

Pour la visualisation de l'espace, Parzysz (1988, 1989, 1991) a déduit certaines conclusions. Comme nous l'avons expliqué dans notre cadre théorique le conflit « *vu/su* » pose problème pour l'élève, en particulier quand il a à représenter des objets géométriques 3D sur papier dans des représentations planes. Bien qu'il y ait une perte d'information du passage de l'objet géométrique à son dessin, l'élève a souvent l'illusion qu'il peut en donner une représentation conforme dans laquelle il n'y a aucune ambiguïté, grâce à un dessin suffisamment élaboré et proche de l'objet. Dans le même temps quand on propose à cet élève de « lire » un dessin, il a tendance à considérer que les propriétés du dessin sont aussi les propriétés de l'objet lui-même. Il y a donc un écart sensible entre la lecture d'un dessin et sa réalisation sur une feuille de papier. Par ailleurs il y a dans la plupart des représentations 2D des objets 3D des conventions qui font que la représentation ne correspond pas exactement à ce qu'on verrait véritablement en présence de l'objet. Par exemple en perspective cavalière, on ne « voit » pas les fuyantes comme parallèles « en vrai », si bien qu'en fait le cerveau de celui qui décode une telle représentation compense ces inexactitudes avec ce qu'il « sait » (ou connaît) de l'objet représenté. En conséquence, l'enseignant doit prendre en charge l'apprentissage des règles de dessin des figures de géométrie dans l'espace. Dans les études menées par Parzysz (1988, 1989, 1991) l'auteur déduit que, faute d'un enseignement spécifique, les élèves peuvent accorder aux dessins des propriétés géométriques qu'ils ne représentent pas et imaginer donner à leurs dessins des caractéristiques géométriques qu'ils n'ont pas.

En conséquence, tel qu'argumenté dans notre cadre théorique, les connaissances spatiales en ce qui concerne les relations entre le « vu » et le « su » pourraient jouer un rôle lorsque les élèves ont à calculer le volume des solides.

4.2 Grilles d'analyse des tâches

Nous allons utiliser quatre grilles d'analyse : une première grille est axée sur la visualisation externe contenant des éléments observables des productions écrites des élèves, soit d'un objet physique ou soit d'une représentation 2D d'un objet 3D (voir figure 4.1) ; une deuxième grille concerne la visualisation interne. Comme chercheur, nous sommes capables de l'identifier dans les productions écrites des élèves à travers des manifestations des difficultés exposées à la figure 4.2.

4.2.1 Première grille d'analyse : visualisation externe

Visualisation externe (directe)	
Objet physique	Identifier les constituants : – formes (nature, nombre et mesure) – squelette de l'objet – arêtes – faces – sommets – nature des angles (dièdre, droit, etc.) – squelette de l'objet 3D
Représentation 2D d'un objet 3D (décodage des informations clés)	

Figure 4.1 Grille d'analyse : la visualisation directe d'un objet 3D

4.2.2 Deuxième grille d'analyse : visualisation interne

Visualisation interne (processus de création d'images mentales)	
1) Constituants du solide	<ul style="list-style-type: none"> – arête – face – sommet <div style="text-align: right; margin-right: 10px;">}⁴</div> <ul style="list-style-type: none"> – hauteurs : <ul style="list-style-type: none"> – apothème de la base (dans un polygone) – apothème d'un cône, d'une pyramide – hauteur du solide – rayon et diamètre (cône, cylindre, boule) – triangle rectangle dans l'espace (cathètes et hypoténuse)
2) reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D	<ul style="list-style-type: none"> – se positionner par rapport à l'objet 3D avec des points de vue différents – imaginer des rotations mentales de l'objet 3D
3) visualiser les développements plans (patrons)	<ul style="list-style-type: none"> – polyèdres (prisme, pyramide) – corps ronds (cône, cylindre) – solides décomposables
4) projections orthogonales d'un objet 3D telles qu'enseignées au secondaire	<ul style="list-style-type: none"> – vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière

Figure 4.2 Grille d'analyse : la visualisation mentale d'un objet 3D

4.2.3 Troisième grille d'analyse : le conflit cognitif « vu/su »

Nous avons élaboré une 3^e grille d'analyse à partir d'éléments du conflit cognitif « vu/su » (Parzysz, 1988) comportant trois sections interreliées exposées au tableau 4.1 :

- dans la colonne de gauche apparaissent les éléments de perception spatiale et de visualisation spatiale (le « vu ») ;
- dans la colonne de droite sont indiquées les connaissances spatiales devant être mobilisées (le « su ») pour effectuer la tâche ;

⁴ À la différence de la visualisation externe où l'élève visualise directement les constituants, soit à partir de l'objet physique, soit à partir d'une représentation 2D d'un objet 3D, la visualisation interne quant à elle, concerne les arêtes, les faces et les sommets qui sont cachés dans la représentation 2D ou encore dans une situation où l'élève n'a pas accès à un objet physique ou à sa représentation 2D.

– dans la colonne du centre sont exposés les éléments du conflit cognitif pouvant se manifester chez l'élève.

En fait, l'usage de cette grille d'analyse nous permettra de répondre à la question : quelles sont les traces laissées dans les productions écrites des participants pour identifier le conflit cognitif « vu/su » ?

Tableau 4.1 Grille d'analyse des tâches : conflit cognitif « vu/su »

<p>Le « VU »</p> <p>La perception spatiale et la visualisation spatiale : ce que je vois de l'objet 3D</p>	<p>Conflit cognitif « VU/SU »</p>	<p>Le « SU »</p> <p>Les connaissances spatiales : ce que je sais de l'objet géométrique</p>
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Caractéristiques des formes de l'objet physique et de sa structure géométrique ▪ Squelette 2D de l'objet 3D ▪ Dimensions de l'objet physique : longueur, largeur, hauteur ▪ Être capable de visualiser des actions imaginaires, le résultat de ses actions (anticipation), des mouvements de l'œil (ou de la tête ou de la main) autour de l'objet physique ▪ Être capable de percevoir des découpages, des organisations, des éléments de structure : hauteur d'un solide, apothème d'une pyramide, apothème d'un cône, apothème d'un polygone à n côtés formant la base de certains solides (prisme, pyramide) ; repérer un triangle rectangle en 3D dans un solide. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ On ne peut dessiner des figures de l'espace que <i>si on sait</i> d'avance comment en sont disposés les divers éléments. Les représentations planes ne facilitent pas nécessairement le repérage de ces éléments et peut être source d'illusions, peut donner lieu à des interprétations (des décodages) erronées. L'élève doit donc prendre conscience de la nécessaire perte d'information dans la représentation plane d'un objet tridimensionnel ▪ Alors qu'en géométrie plane on peut raisonner à partir du dessin de la figure, donc après l'avoir exécuté, en géométrie dans l'espace on est contraint de raisonner avant de dessiner et de n'attribuer au dessin que les propriétés dont on sait qu'elles sont celles de la figure représentée. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Nomenclature (figures planes et solides) ▪ Notions de dimension des objets (solide (3D), face (2D), arêtes (1D), sommets (0D)), d'incidence, d'adjacente, de parallélisme, de perpendicularité et d'angles (entre les arêtes, entre les faces, entre une arête et une face) ▪ Mesures des angles dièdres (entre les faces), des angles plans entre les arêtes, des angles droits entre les faces perpendiculaires ▪ Avoir en tête une banque d'objets standardisés, autant en 2D qu'en 3D (triangle, rectangle, quadrilatère, polyèdres et corps ronds)

<ul style="list-style-type: none"> ▪ Déconstruction dimensionnelle : recherche des éléments structuraux de dimension 0 (sommets), de dimension 1 (arêtes), de dimension 2 (faces). ▪ Visualiser la forme résultante suite à l'assemblage de solides décomposables. ▪ Visualiser les développements plans et les vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière d'un objet 3D 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dans la perspective cavalière, le su et le vu se mêlent, car il est question de rendre compte aussi de ce qui « normalement » ne se voit pas, telles les arêtes de l'octaèdre tronqué, dont le pointillé signifie qu'elles appartiennent à des « faces cachées » ; ou encore des perpendicularités qui sont dans l'objet physique, mais qui doivent être « décodées » dans la représentation ▪ Perte d'information entre la figure et sa représentation ▪ Il n'y a pas toujours une relation d'isomorphisme entre la représentation et l'objet 3D 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Propriétés des polyèdres réguliers ▪ Propriétés des angles des figures planes ▪ Propriétés de la perspective cavalière ▪ Propriétés de la perspective à 1 point de fuite et à 2 points de fuite ▪ Propriétés d'un développement plan ▪ Propriétés des vues de face, de droite, de dessus, de gauche, du dessous, d'arrière ▪ Capacité à comprendre le caractère générique des représentations géométriques (distinction figure – dessin)
---	---	--

4.2.4 Quatrième grille d'analyse

Une quatrième grille d'analyse servira à identifier les difficultés dans l'application des formules de volumes. Nous l'avons conçue à partir des études de Janvier (1992, 1994, 1997) et de Tanguay (2009, 2010).

Difficultés se manifestant dans l'application des formules de volume	
1. Conception procédurale de la formule de volume	– raisonnement ne s'appuyant sur une représentation spatiale de l'objet 3D
2. Reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule ou inversement, à associer la bonne formule à un solide donné	– polyèdres, corps ronds et solides décomposables
3. Repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale:	– confusion hauteur-arête, hauteur-apothème – se représenter mentalement de la hauteur abaissée d'un point sur un plan
4. Calcul de volume de solides complexes (décomposables)	– difficulté à trouver le bon découpage – percevoir le découpage en de tranches à la base du principe de Cavalieri

Figure 4.3 Quatrième grille d'analyse : difficultés se manifestant dans l'application des formules de volume

4.3 Analyse des trois tâches de résolution de problèmes

Nous allons dans un 1^{er} temps, exposer les résultats de notre étude en présentant, sous forme de tableau, le taux de réussite pour chacune des questions de la tâche, les difficultés vécues et leur nombre d'occurrences. Ensuite, nous allons procéder à l'analyse des résultats à l'aide de grilles que nous avons élaborées.

Tableau 4.2 Types de difficultés décrits par la recherche et relatives à la tâche 1

Tâche 1	Taux de réussite	Type de difficultés par question	Nombre d'occurrences de la difficulté	Numéro production écrite (sur 33 productions)	Absences de démarche écrite(% d'occurrence)
Question a	$\frac{31}{33} = 93,9 \%$	Visualisation externe (directe)	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$	#17 et 24	s/o
Question b	$\frac{21}{33} = 63,6 \%$	Dessiner un objet 3D en perspective cavalière	$\frac{12}{33} = 36,4 \%$	#5, 6, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 19, 22 et 23	s/o
	$\frac{20}{33} = 60,6 \%$	Dessiner un objet 3D en perspective à 1 point de fuite	$\frac{13}{33} = 39,4 \%$	#1, 7, 11, 13, 15, 16, 17, 19, 22, 27, 28, 29 et 31	s/o
	s/o	Conflit cognitif « vu/su » (perte d'informations spatiales dans la représentation 2D)	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$	#5 et 11	s/o
Question c	$\frac{24}{33} = 72,7 \%$	Confusion type de représentation	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$	#9 et 12	$\frac{1}{33} = 3,0 \%$

		Conflit cognitif « vu/su » (perte d'informations spatiales dans la représentation 2D) Visualisation mentale	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$	#25 et 31	#15
			$\frac{4}{33} = 12,1 \%$	#13, 19, 29 et 30	
Question d	$\frac{21}{33} = 63,6 \%$	Erreur dans les opérations mathématiques de base	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$	#11 et 30	$\frac{2}{33} = 6,1 \%$ #12, 16
		Reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule de volume	$\frac{1}{33} = 3,0 \%$	#6	
		Repérer les éléments dans la formule dans la représentation spatiale	$\frac{5}{33} = 15,2 \%$	#10, 15, 19, 20, 28	
		Formule de volume erronée	$\frac{1}{33} = 3,0 \%$	#21	
Question e	$\frac{30}{33} = 90,9 \%$ Visualisation spatiale importante	Conflit cognitif « vu/su » (perte d'informations spatiales dans la représentation 2D)	$\frac{1}{33} = 3,0 \%$	#5	$\frac{1}{33} = 3,0 \%$ #22
		Confusion aire-volume d'un prisme droit régulier à base hexagonale	$\frac{1}{33} = 6,1 \%$	#16	

Pour faciliter la lecture de notre analyse de la tâche 1, nous allons synthétiser des éléments de réponses à nos questions de recherche.

Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiale dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?

Dans la *question a*, le rôle de la visualisation externe et interne a été d'aider l'élève à nommer correctement le nouveau solide (prisme droit régulier à base trapézoïdale) en repérant spatialement ses constituants.

Dans la *question c*, pour les élèves ayant eu une difficulté à utiliser l'habileté de visualisation interne du prisme droit à base trapézoïdale, nous pensons qu'elle est liée à la capacité de comprendre les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement, de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace, pour produire un développement plan. De plus, dans l'élaboration du développement plan, nous avons montré l'existence d'un processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) relevant principalement de la visualisation interne, ainsi que de la visualisation externe, dans une moindre mesure.

À la *question e*, puisque le taux de réussite a été élevé (90,9 %), les élèves ont utilisé la visualisation interne en se créant des images mentales des 6 barres Toblerone assemblées, pour former un nouveau prisme sans qu'il y ait d'espace vide. Nous avons constaté que 54,5 % des élèves ont produit un dessin en perspective cavalière sans utiliser un calcul de volume pour déterminer le bon nombre de barres à placer dans le prisme droit à base hexagonale, ce qui démontre que l'habileté de visualisation a été mobilisée et qu'elle a été très utile.

Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

Pour le dessin en perspective cavalière et à 1 point de fuite (*question b*), nous dégageons que la difficulté centrale pourrait provenir d'une coordination des images mentales issues de la visualisation externe et de la maîtrise des règles de la perspective. En conséquence, la visualisation spatiale a agi en interdépendance avec la capacité à produire des représentations en perspective.

Nous avons dégagé que pour 15,2 % des élèves (*question d*), la visualisation spatiale a eu un rôle à jouer dans le traitement de la formule de volume du prisme droit à base trapézoïdale. En effet, la difficulté la plus fréquente fut celle de repérer les éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale que les élèves avaient produite (perspectives cavalière et à 1 point de fuite, et développement plan).

4.3.1 Analyse de la tâche 1 : *du chocolat Toblerone !*

Question a : Nomme le nouveau prisme ainsi formé.

Nous allons utiliser la grille d'analyse 4.1 : visualisation directe d'un objet 3D.

L'élève visualise directement soit les trois prismes droits réguliers à base triangulaire (barres Toblerone), soit les trois structures *Polydron Frameworks* qu'il a construites, formant un prisme droit régulier à base trapézoïdale qu'il peut manipuler dans différentes positions. En conséquence, il identifie la nature, la mesure et le nombre des formes : une barre est constituée de trois rectangles isométriques et deux triangles équilatéraux.

L'élève peut facilement manipuler, positionner, juxtaposer les barres deux à deux ou les trois ensembles, dans le sens de la largeur ou de la longueur. En procédant ainsi, il utilise un processus de visualisation directe : le nouveau solide créé est un tout nouveau prisme avec ses composantes.

Il visualise directement qu'il doit produire une rotation (de 180°) de la barre qui sera placée entre les 2 autres, formant ainsi un nouveau solide illustré à la figure 4.4.

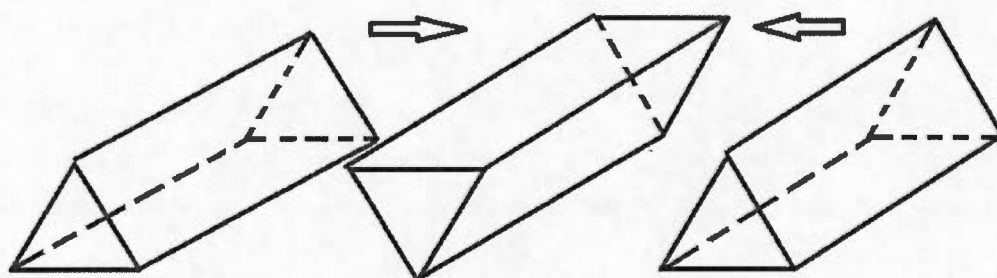


Figure 4.4 Assemblage des 3 barres par juxtaposition

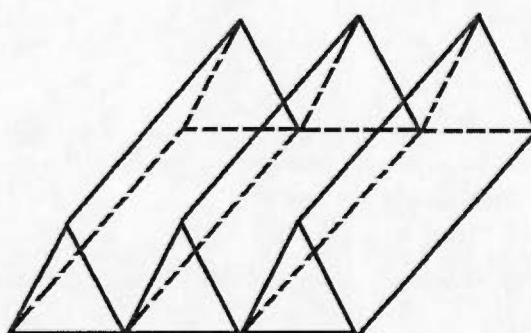


Figure 4.5 Assemblage des 3 barres de chocolat à plat sur chaque base en perspective cavalière.

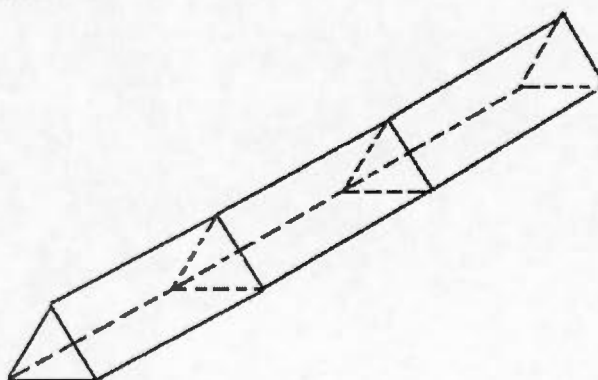


Figure 4.6 Juxtaposition « bout à bout » selon les bases triangulaires

Analyse des réponses obtenues à la question a : Nomme le nouveau prisme formé

La réponse adéquate est la suivante : *prisme droit régulier à base trapézoïdale ou encore prisme à base de trapèze.*

Dans le tableau des résultats 4.2, nous avons eu 31 élèves sur 33 qui ont eu la réponse adéquate. Seulement deux élèves ont indiqué *trapèze* sans mentionner *prisme à base de...*

En conséquence, il apparaît clairement que la visualisation directe a joué un rôle pour identifier le nom du nouveau prisme puisque 93,9 % (31 sur 33) des élèves ont obtenu la bonne réponse. Le fait d'avoir eu accès à des objets physiques pouvant être manipulés dans différentes positions a pu contribuer à la réussite de la *question a*.

Question b : Représente-le en perspective à 1 point de fuite, puis en perspective cavalière.

Analyse des réponses obtenues à la question b

La réponse attendue que nous avons précisée dans notre analyse *a priori* est donnée dans la figure 4.7 :

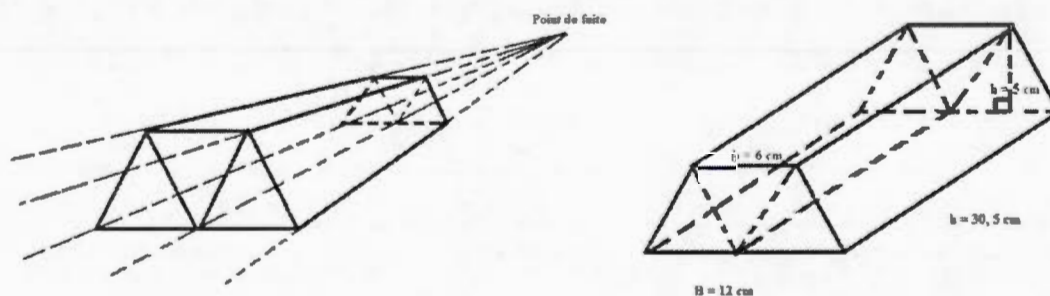


Figure 4.7 Représentations du solide
(perspective à 1 point de fuite et perspective cavalière)

Pour analyser les réponses des productions écrites des élèves, nous avons intégré des éléments de la grille 4.1 (visualisation externe) à la grille du tableau 4.1 (conflit cognitif « vu/su ») afin d'éviter les dédoublements. Pour la perspective cavalière, 21 copies parmi les 33 analysées présentent un dessin en perspective cavalière adéquat en respectant les conventions de cette technique avec un taux de réussite de 63,6 %.

Les productions écrites contenant des représentations en perspective cavalière erronées représentent 36,4 % des élèves. Il nous apparaît que la difficulté principale chez ces élèves provient d'une coordination de leurs images mentales ou encore de leur visualisation externe avec les règles de la perspective cavalière, plus spécifiquement celle ayant trait au parallélisme des arêtes horizontales, des arêtes verticales et des fuyantes. Ces dernières sont toutes du même côté de la face du solide se trouvant dans le plan frontal de la feuille sur laquelle l'objet est dessiné, et elles doivent être parallèles entre elles. De plus, l'angle de profondeur doit être d'environ 45° . Or, nous constatons que dans ces productions écrites, ce n'est pas le cas.

Nous allons exposer trois exemples de telles productions.

1^{er} exemple : production écrite (copie #11)

Voici des éléments de visualisation directe provenant de l'objet physique (3 barres Toblerone assemblées ou 3 *Polydrons Frameworks*)

- nature des formes : rectangle identifié, trapèze non identifié,
- mesure des formes : longueur de 30,5 cm d'un rectangle ; mesure erronée de la grande base B du trapèze (18 cm au lieu de 12 cm)
- nombre de formes dessinées : 3 triangles équilatéraux et 2 rectangles
- les arêtes obliques ne sont pas dessinées
- les 2 faces trapézoïdales ne sont pas dessinées explicitement

Pour la copie # 11 (voir figure 4.8), certaines arêtes de la 2^e base trapézoïdale ne sont pas parallèles aux arêtes de la 1^{re} base trapézoïdale dessinées dans le plan frontal. De plus, les

fuyantes qui sont cachées dans la représentation 2D ne sont pas tracées en trait pointillé. Nous précisons que les élèves sont habitués à représenter les arêtes obliques en trait pointillé dans les exercices qu'ils ont travaillés précédemment.

Qui plus est, en observant la base trapézoïdale dessinée au plan frontal de la feuille de papier, on constate que cet élève a représenté les 3 bases triangulaires équilatérales provenant de la juxtaposition des barres Toblerone dans le sens de la longueur qui forment un trapèze. Cela laisse penser que l'élève a voulu rendre visible chacune des trois barres séparées en présentant les trois faces triangulaires comme légèrement espacées, séparées, mais sans se soucier de la cohérence de la représentation du solide résultant. Nous en discuterons plus loin lorsque nous analyserons la difficulté comme une manifestation du conflit cognitif « vu/su ».

COPIE DE L'ÉLÈVE # 11

Tâche 1 : du chocolat Toblerone!

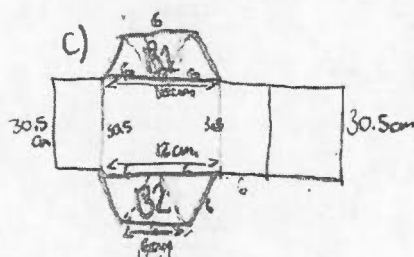
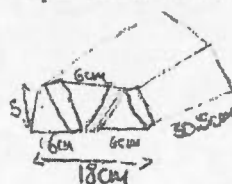
Nom: _____

Écrivez entièrement votre démarche :

- a) Prisme à base trapézoïdal
 b) Perspective à 1 point de fuite



Perspective cavalière



d) $V_{\text{prisme}} = A_{\text{base}} \cdot h$
 $= \frac{(18+6) \cdot 5}{2} \cdot h$
 $= \frac{(12 \cdot 6) \cdot 5}{2} \cdot 30.5$
 $= 5490 \text{ cm}^3$



$$A_b = \frac{18 \cdot 6}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 90 \text{ cm}^2$$

$$V = A_b \cdot h$$

$$= 90 \cdot 30.5$$

$$= 2745 \text{ cm}^3$$

Il est possible de mettre 6
 Toblerone dans chaque boîte parce que
 c'est fait de 6 boîtes de Toblerone.

Perspective
cavalière

©Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

1

Figure 4.8

Parallélisme – perspective cavalière (copie #11)

2^e exemple : production écrite (copie #17)

Voici des éléments de visualisation directe provenant de l'objet physique (3 barres Toblerone assemblées ou 3 Polydrons Frameworks)

- nature des formes : quadrilatère, trapèze
- mesure des formes : aucune mesure n'est indiquée dans la représentation 2D
- nombre de formes dessinées : 1 trapèze et 2 quadrilatères
- les fuyantes cachées dans la représentation ne sont pas dessinées
- une face trapézoïdale n'est pas dessinée

Pour la copie #17 (voir figure 4.9), certaines arêtes des faces latérales rectangulaires ne sont pas tracées en parallèle. De même, une arête de la 2^e base trapézoïdale n'est pas tracée parallèlement à l'arête qui est dessinée dans le plan frontal de la 1^{re} base trapézoïdale. De plus, une règle de la perspective cavalière stipule que l'angle de profondeur des fuyantes doit être d'environ 45° ; or, ce n'est pas le cas pour les 3 arêtes tracées. Et les arêtes obliques cachées dans la représentation 2D ne sont pas tracées en pointillé.

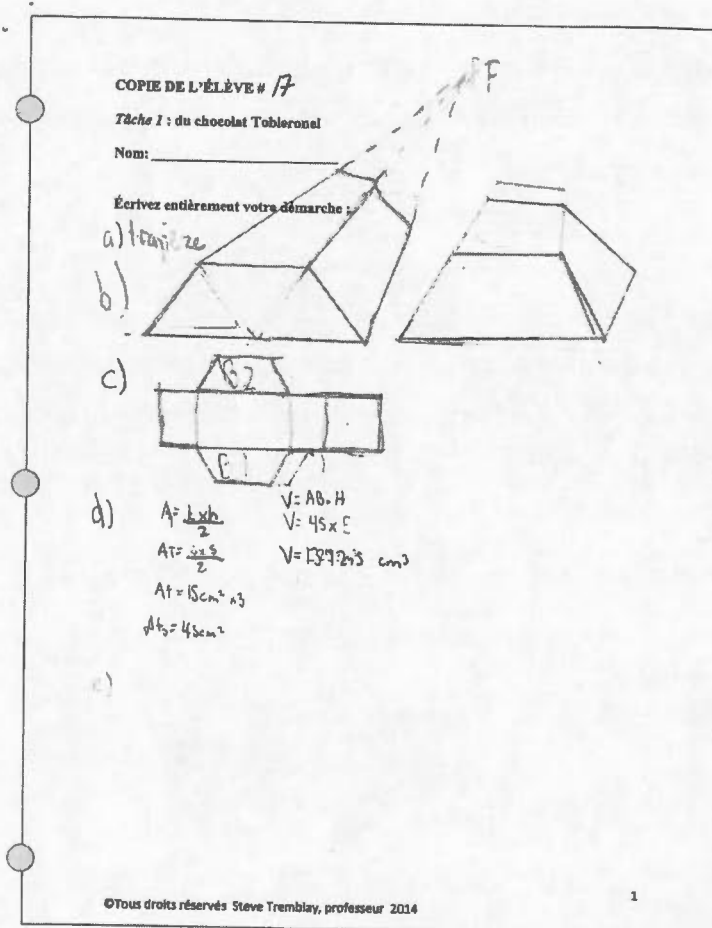


Figure 4.9 Règles, parallélisme et angles – perspective cavalière (copie #17)

3^e exemple : production écrite (copie #19)

Voici des éléments de visualisation directe provenant de l'objet physique (3 barres Toblerone assemblées ou 3 Polydrons Frameworks)

- nature des formes : trapèze résultant de l'assemblage de 3 triangles équilatéraux, 2 quadrilatères ayant la forme de rectangle

- mesure des formes : aucune mesure n'est indiquée dans la représentation 2D
- nombre de formes dessinées : 3 triangles équilatéraux, 1 trapèze et 2 quadrilatères
- les fuyantes qui sont cachées dans la représentation 2D ne sont pas dessinées
- une face trapézoïdale n'est pas représentée convenablement, de même que les faces latérales rectangulaires

Dans la copie #19 (voir figure 4.10), nous constatons les mêmes difficultés, soit que les arêtes de la 2^e base trapézoïdale du prisme droit ne sont pas dessinées parallèlement à celles de la 1^{re} base dessinée au plan frontal. De même, certains côtés des faces latérales rectangulaires du prisme droit ne sont pas dessinés en parallèle. Aussi, les mesures des angles de ces rectangles ne sont pas isométriques dans le dessin en perspective.

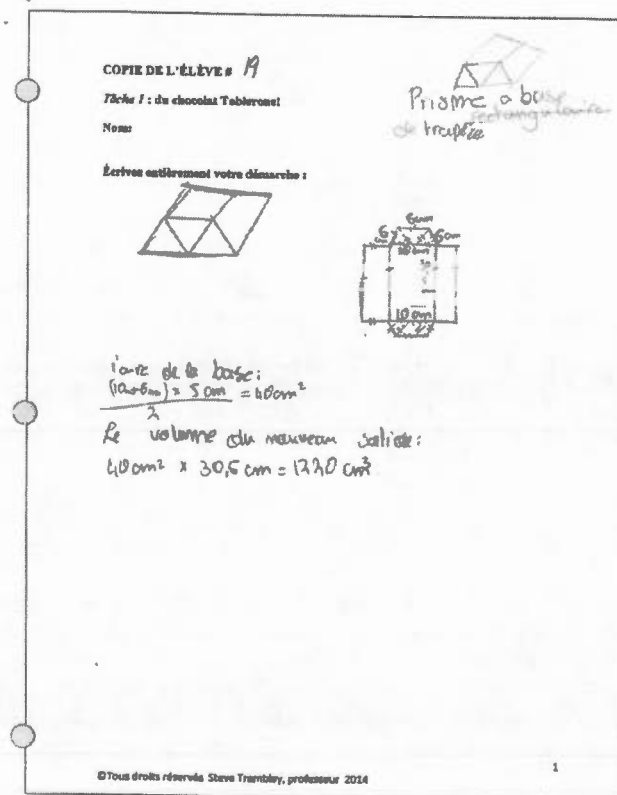


Figure 4.10 Difficulté des règles de la perspective cavalière (copie #19)

Pour la perspective à 1 point de fuite, 20 copies parmi les 33 analysées présentent une représentation 2D en respectant les conventions de cette technique avec un taux de réussite de 60,6 %.

Les productions écrites contenant des représentations en perspective à 1 point de fuite erronées représentent 39,4 % des élèves.

Il nous apparaît que la difficulté centrale a pu concerner la maîtrise des règles de la perspective à 1 point fuite, combinée à une compréhension déficiente de la relation de parallélisme dans l'espace. En voici deux exemples.

1^{er} exemple : production écrite (copie #13)

Voici des éléments de visualisation directe provenant de l'objet physique (3 barres Toblerone assemblées ou 3 *Polydrons Frameworks*)

- nature des formes : trapèze résultant de l'assemblage de 3 triangles équilatéraux (base du prisme), trapèze dessiné (erroné) qui correspond à une face latérale rectangulaire, 2 autres trapèzes dessinés (erronés) correspondants à 2 faces latérales rectangulaires
- mesure des formes : aucune mesure n'est indiquée dans la représentation 2D
- nombre de formes dessinées : 4 trapèzes
- les fuyantes qui sont cachées dans la représentation 2D ne sont pas dessinées
- une face trapézoïdale n'est pas représentée convenablement, de même que les faces latérales rectangulaires

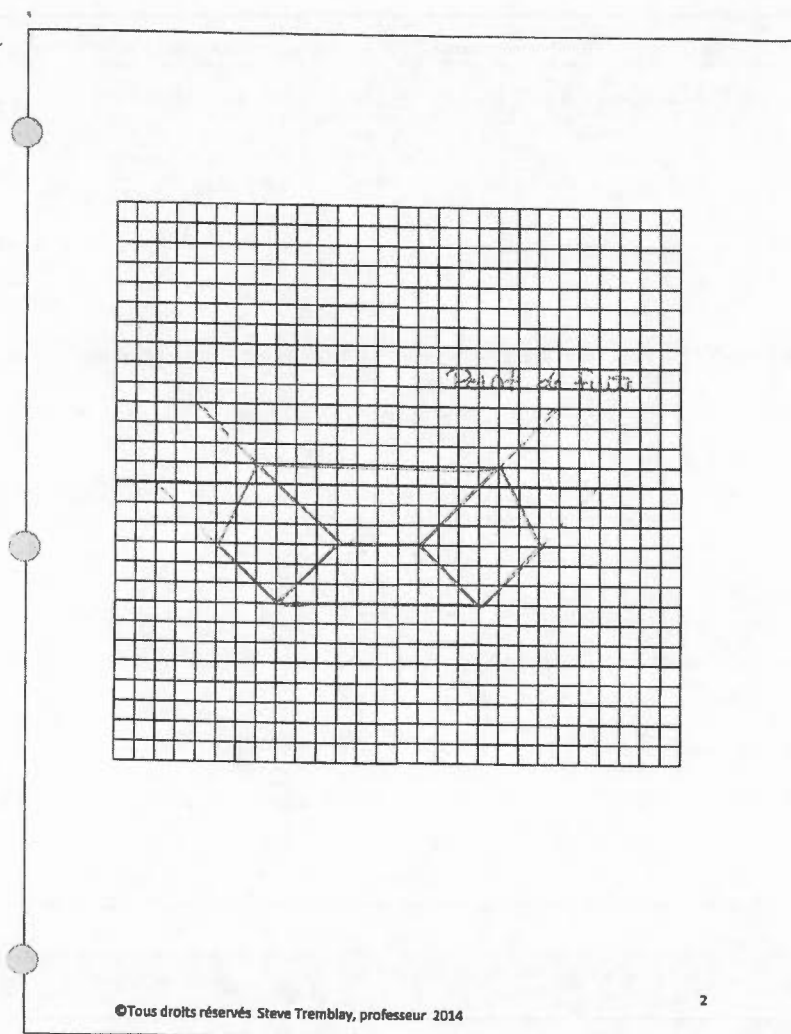


Figure 4.11 Difficultés des règles de la perspective à 1 point de fuite (copie #13)

Dans la copie #13, (voir figure 4.11), une 1^{re} règle de la perspective à 1 point de fuite n'est pas appliquée : les fuyantes ne convergent pas vers un seul point de fuite. Nous observons sur la production écrite de cet élève qu'il a tenté d'utiliser 2 points de fuite à cause des traits pointillés qu'il a dessinés à partir de 2 faces latérales ; ces traits semblent converger vers 2 points de fuite « situés » à l'infini.

De plus, les droites formant les 3 faces latérales qui sont censées être des rectangles ne convergent pas vers un point de fuite, et d'ailleurs aucun point de fuite n'est clairement indiqué sur la feuille de papier quadrillé.

Qui plus est, nous considérons que cet élève sait que les faces rectangulaires de ce prisme sont des rectangles, parce qu'il avait accès à du matériel concret. Or, nous constatons qu'il a représenté ces faces rectangulaires sous la forme de 3 trapèzes. En conséquence, il ne s'est pas basé sur la compétence de visualisation externe pour produire sa représentation en perspective à 1 point de fuite. Ainsi, nous suggérons qu'il a eu une difficulté supplémentaire à procéder au bon encodage d'informations clés dont il avait besoin pour produire sa représentation 2D (forme des faces latérales rectangulaires du prisme droit, 2 trapèzes formant les bases, angles intérieurs de ces formes, etc.).

2^e exemple : production écrite (copie #11)

Les éléments de visualisation directe provenant de l'objet physique ont déjà été exposés antérieurement (voir exemple 1, question b).

Dans la copie #11 (voir figure 4.12), les faces qui sont tracées dans la représentation 2D ne correspondent pas aux fuyantes que l'élève a dessinées. En effet, si nous regardons attentivement ces faces et traçons les fuyantes sur la production écrite de cet élève, nous constatons qu'elles convergent vers un point de fuite qui est ailleurs que celui indiqué par l'élève sur sa copie. De plus, une arête horizontale (partie supérieure du dessin) de la 2^e base trapézoïdale n'est pas parallèle à l'arête qui lui correspond dans la 1^{re} base trapézoïdale.

En conséquence, nous dégageons que cet élève a pu confondre la technique de représentation en perspective à 1 point de fuite avec celle en perspective cavalière, et nous nous appuyons pour avancer cela sur les raisons suivantes :

- l'angle de profondeur des fuyantes est d'environ 45°
- une face (trapèze) est dessinée en vraie grandeur et parallèle au plan frontal
- les arêtes horizontales et verticales sont tracés en parallèle (sauf une arête horizontale appartenant à la 2^e base trapézoïdale)

COPIE DE L'ÉLÈVE # 11

Tâche 1 : du chocolat Toblerone!

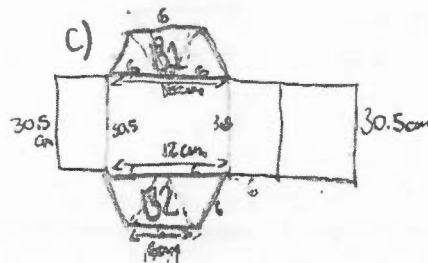
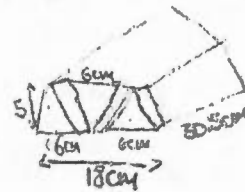
Nom: _____

Écrivez entièrement votre démarche :

a) Prisme à base trapézoïdal

b) Perspective à 1 point de fuite

Perspective cavalière



$$\begin{aligned}
 d) V_{\text{prisme}} &= A_{\text{base}} \cdot h \\
 &= \frac{(18+6)}{2} \cdot 5 \cdot 30.5 \\
 &= \frac{12 \cdot 6}{2} \cdot 5 \cdot 30.5 \\
 &= 5490 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 A_b &= \frac{90}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 90 \text{ cm}^2 \\
 V &= A_b \cdot h \\
 &= 90 \cdot 30.5 \\
 &= 2745 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Il est possible de mettre 6 Toblerone dans chaque boîte parce que c'est fait de 6 boîtes de Toblerone.

Perspective cavalière



© Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

1

Figure 4.12 Règles parallélisme et fuyantes, perspective à 1 point de fuite

Nous allons maintenant analyser des productions écrites comportant des éléments du conflit cognitif « vu/su » en nous servant de la grille conçue à cette fin (voir tableau 4.1). Le conflit « vu/su » se produit plus clairement dans les productions écrites #5 et 11.

1^{er} exemple de conflit cognitif « vu/su » (perspective cavalière)

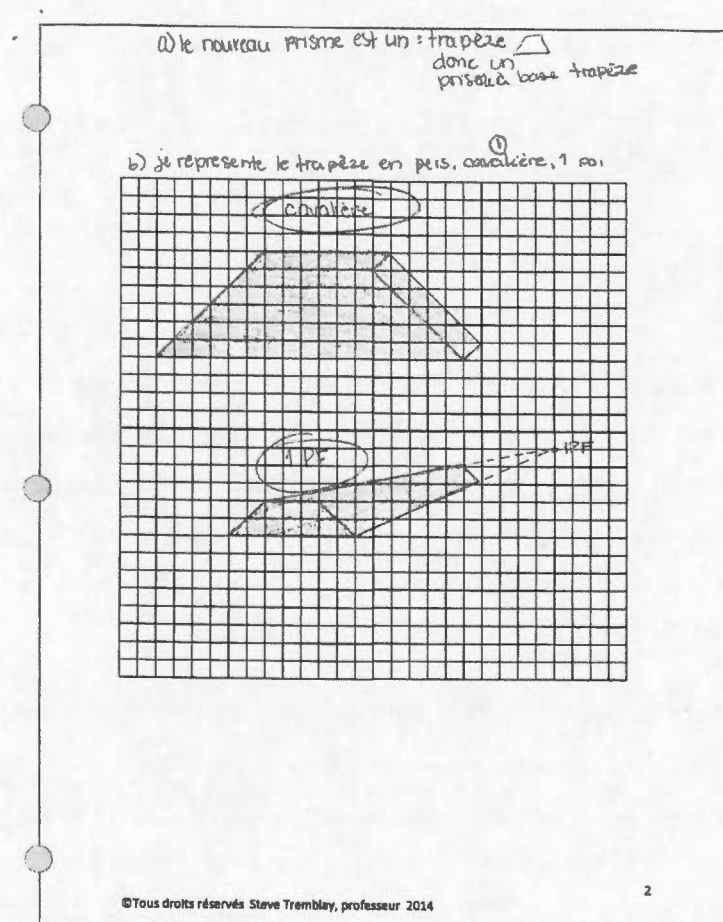


Figure 4.13 Conflit cognitif « vu/su » (dimension des faces rectangulaires) – copie #5

Dans la copie #5, nous constatons qu'il y a manifestation du conflit cognitif « vu/su ». En effet, à la figure 4.13, il est très probable que cet élève sait (le *su*) que les faces latérales rectangulaires du prisme droit à base trapézoïdale sont de dimensions 6 cm par 30,5 cm (3

rectangles) et de 12 cm par 30,5 cm (1 rectangle), mais il a représenté ces rectangles de la manière suivante⁵ : 3 rectangles d'environ 6 cm par 6 cm et 1 rectangle d'environ 12 cm par 6 cm. Il y a donc une perte d'information spatiale, soit celle de la longueur des rectangles, plus spécifiquement, que la longueur soit de 30,5 cm.

Qui plus est, ce qui vient appuyer notre argumentation, c'est que cette perte d'information (dimension des faces) ne s'est pas manifestée dans la représentation en perspective à 1 point de fuite du même solide (prisme droit régulier à base trapézoïdale).

En ce qui concerne les règles de la perspective cavalière pour cette production écrite (copie #5), il n'y manque que les arêtes obliques cachées, qui ne sont pas dessinées en pointillé.

2^e exemple de conflit cognitif « vu/su » (perspective cavalière)

Dans la copie #11, que nous avons déjà analysée pour les difficultés des règles des dessins en perspective (cavalière, 1 point de fuite), nous avons repéré aussi une manifestation du conflit cognitif « vu/su ». En effet, à la figure 4.11, nous observons une prégnance du *su* sur le *vu*, c'est-à-dire que cet élève, sachant (connaissances spatiales) que la juxtaposition des 3 bases triangulaires forme un trapèze, a cherché à garder visible ces 3 triangles équilatéraux et les a dessinés séparés au lieu du trapèze apparaissant dans le plan frontal de la feuille de papier. Il a donc représenté ce qu'il « sait » plutôt que ce qu'il « voit ».

De plus, dans sa représentation 2D, il a indiqué que la mesure de la grande base *B* formée par la juxtaposition des 3 triangles équilatéraux est de 18 cm (3×6 cm) : nous envisageons qu'il s'est donc fié à ses connaissances spatiales au lieu d'utiliser la visualisation externe à partir du dessin en perspective cavalière qu'il a produite. En l'occurrence, le repérage d'une information clé (visualisation de la mesure de la grande base *B*) a été perdu et fut interprété de façon erronée chez cet élève.

⁵ L'élève n'a pas indiqué les dimensions de sa représentation 2D, cependant en la comparant avec sa représentation en perspective à 1 point de fuite, nous estimons que la dimension du côté d'un rectangle est d'environ 6 cm.

De tout ce qui a été dit sur la *question b*, nous résumons notre analyse en deux points :

- 1) D'après les résultats obtenus, à savoir que 36,4 % des élèves ont manifesté une difficulté à produire une représentation en perspective cavalière adéquate, que 39,4 % des élèves ont éprouvé une autre difficulté dans les représentations en perspective à 1 point de fuite, il apparaît que ces difficultés émergent d'une coordination de la visualisation spatiale (externe) combinée à une maîtrise efficace des règles de ces techniques de représentation, comme nous l'avons montrée précédemment.
- 2) En ce qui a trait au conflit cognitif « vu/su », cette difficulté représente 6,1 % des élèves et nous avons exposé qu'elle s'est produite à 2 reprises dans la représentation en perspective cavalière du prisme droit régulier à base trapézoïdale. Le conflit « vu/su » s'est manifesté dans le repérage d'informations clés (forme de la face trapézoïdale, dimension de la longueur des faces latérales rectangulaires) s'effectuant par l'habileté de visualisation externe de l'objet physique (assemblage des 3 barres), avec des élèves qui ont réalisé un décodage erroné des informations se manifestant par une prégnance du *su* sur le *vu* ou du *vu* sur le *su*, les conduisant à produire une représentation en perspective cavalière inadéquate.

Question c: Dessine un développement plan pour ce nouveau polyèdre. Indique les dimensions du nouveau prisme et identifie les bases du prisme par B1 et B2.

Nous allons procéder de la même manière que pour l'analyse de la *question b*.

Analyse des réponses obtenues à la question c

À la suite de la compilation des réponses adéquates, il y a 24 élèves sur 33 qui ont dessiné un développement plan du nouveau polyèdre : un prisme droit à base trapézoïdale. Le taux de réussite est donc de 72,7 %.

Voici deux exemples de productions d'élèves ayant des représentations adéquates d'un développement plan du prisme droit régulier à base trapézoïdale (figure 4.14 et figure 4.15)

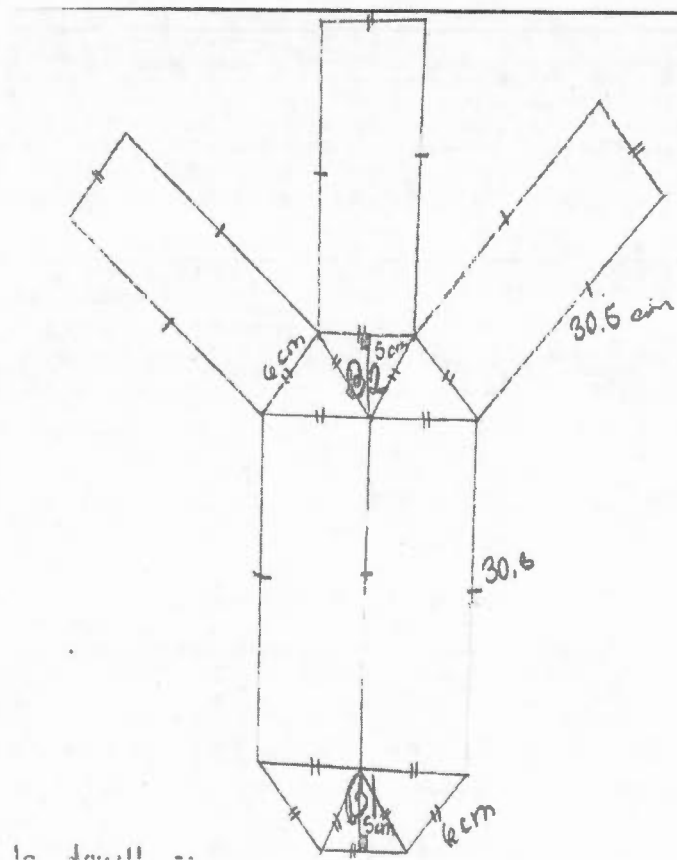


Figure 4.14 Un développement plan du prisme droit à base trapézoïdale –
(copie #16)

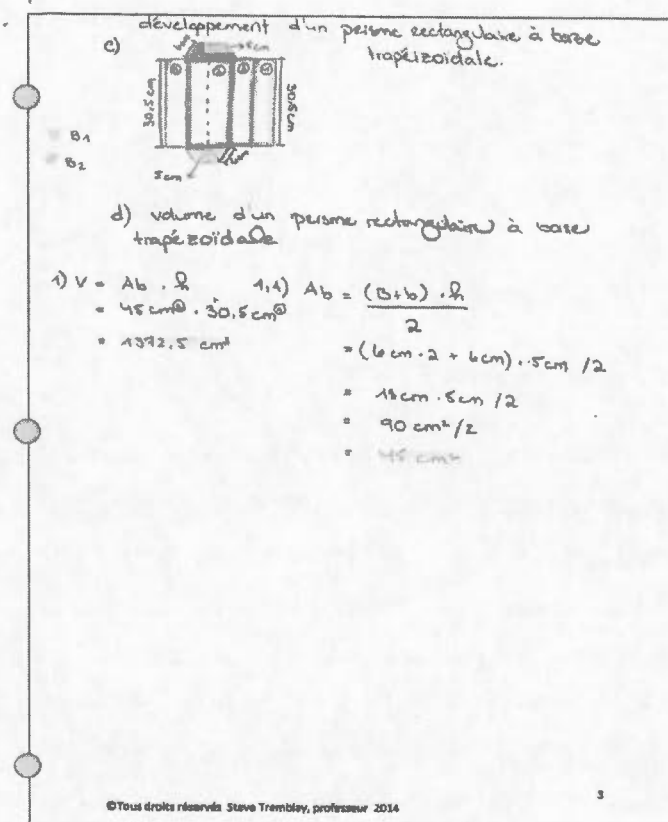


Figure 4.15 Autre développement plan du prisme droit à base trapézoïdale – (copie # 24)

Les 24 élèves ayant réussi la *question c* de la tâche 1 sont capables d'identifier les constituants du solide. De plus, ils peuvent aussi se servir de la visualisation interne pour reconnaître les constituants du nouveau solide formé. C'est-à-dire, en imaginant se positionner dans l'espace selon différents points de vue par rapport à l'objet 3D (face, droite, dessus, gauche, dessous, arrière), ils se construisent ainsi des images mentales dynamiques du développement plan du solide.

En conséquence, nous faisons le constat que ces 24 élèves possèdent une « bonne » capacité de perception spatiale ainsi qu'une visualisation externe et une visualisation interne

développées venant compléter la perception tridimensionnelle de l'objet 3D. De plus, pour ces mêmes élèves, il n'y pas apparence de conflit cognitif « *vu/su* ». Nous déduisons alors qu'il y a eu apprentissage.

Pour les dix élèves qui n'ont pas fourni des réponses adéquates, nous pensons qu'ils se retrouvent soit dans le cas d'une visualisation mentale déficiente — qui va donc nécessiter un entraînement pour se développer —, soit dans le cas d'un conflit cognitif « *vu/su* ». Nous allons analyser deux productions écrites où il y a présence de ce conflit.

Exemple 1 production écrite (copie #25) – voir figure 4.16

L'élève a utilisé sa visualisation externe pour identifier les constituants du prisme droit à base trapézoïdale qu'il a construit. Ce qui signifie qu'il a utilisé également des éléments de connaissances spatiales, précisément que les deux bases du nouveau prisme sont des trapèzes résultant de la juxtaposition des bases triangulaires (6 triangles équilatéraux), et que les faces latérales sont constituées de 4 rectangles dont 1 rectangle de 12,5 cm par 30,5 cm et 3 autres rectangles de dimension, 6 cm par 30,5 cm. Le conflit cognitif « *vu/su* » s'est manifesté chez cet élève, où une prégnance du *su* sur le *vu* s'est produite puisqu'il a représenté 6 triangles équilatéraux au lieu de 2 trapèzes formant les bases du prisme droit, ainsi que 9 rectangles isométriques de dimension 6 cm par 30,5 cm au lieu des 4 rectangles dont nous avons indiqué les dimensions précédemment. Bref, dans le processus d'encodage, l'élève a représenté ce qu'il savait (ou croyait savoir) du solide plutôt que de se fier à ce qu'il pouvait en voir, d'où la prédominance du *su* sur le *vu*.

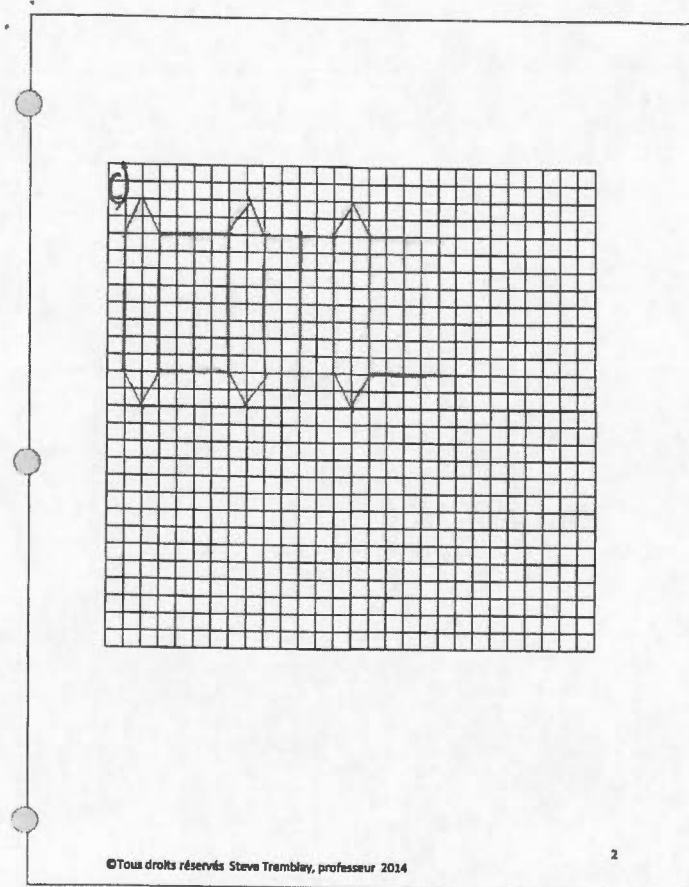


Figure 4.16 Présence du conflit « vu/su » dans un développement plan – copie # 25

Exemple 2 : production écrite (copie #31) – figure 4.17

À la figure 4.17 est exposé un autre exemple de conflit cognitif « vu/su ». Les éléments de connaissances spatiales qui ont été mobilisés sont les mêmes que nous avons exposés pour la copie #25. Pour les éléments de visualisation spatiale, nous constatons que l'élève a dessiné ce qu'il a su (prégnance du *su* sur le *vu*), soit 5 rectangles isométriques et 10 triangles équilatéraux. Toutefois, parmi ces 10 triangles, nous ne pouvons analyser finement comment cet élève a ajouté 4 triangles aux 6 autres présents qu'il a vu des objets physiques. Nous constatons la présence d'un conflit cognitif entre ce qu'il savait et ce qu'il voyait, à partir de

la visualisation externe de l'objet 3D, où l'élève a procédé à un décodage erroné d'informations clés (constituants du prisme droit à base trapézoïdale, dimensions) le conduisant par le fait même à produire un développement plan erroné.

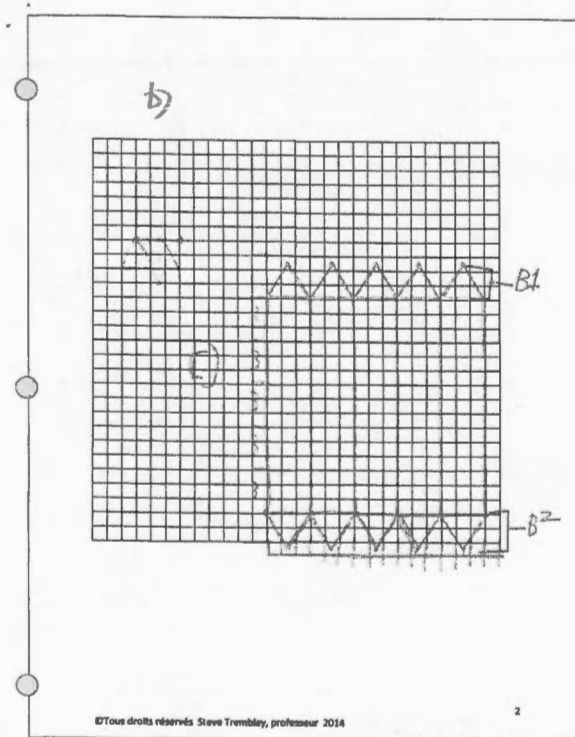


Figure 4.17 Présence du conflit « vu/su » dans un développement plan – copie # 31, p. 2

En résumé, pour ces 2 élèves, il semble bien qu'il y a eu une prégnance du *vu* sur le *su* puisqu'ils ont conservé le plus d'informations relevant des connaissances du processus de la construction du solide, par exemple, la forme triangulaire des bases d'une barre Toblerone dans leur processus d'encodage en percevant le nouvel objet physique (prisme droit régulier à base trapézoïdale), même s'ils « savaient » (le « *su* » de Parzysz) que les formes des nouvelles bases seraient trapézoïdales.

Une autre raison pouvant expliquer ce phénomène est que ces élèves avaient accès à du matériel concret qu'ils pouvaient manipuler, assembler et auquel ils pouvaient faire faire des rotations. Nous envisageons que ces élèves aient accordé une plus grande importance à la visualisation d'une barre Toblerone au détriment de la visualisation de l'assemblage des 3 barres. En conséquence, ils se sont basés sur ce qu'ils ont perçu, soit les formes triangulaires des bases, c'est-à-dire, 3×2 triangles donnent 6 triangles à dessiner et 3 rectangles \times 3 barres donneront 9 rectangles isométriques à dessiner (copie #25).

D'autres productions écrites présentent d'autres types de difficulté. Par exemple, dans les copies # 9 et 12 (voir figure 4.18), nous observons une représentation en perspective cavalière au lieu d'une représentation en développement plan. Nous constatons qu'il y a confusion dans les types de représentations d'objets 3D, en ce qui concerne le patron d'un solide et sa représentation en perspective cavalière.

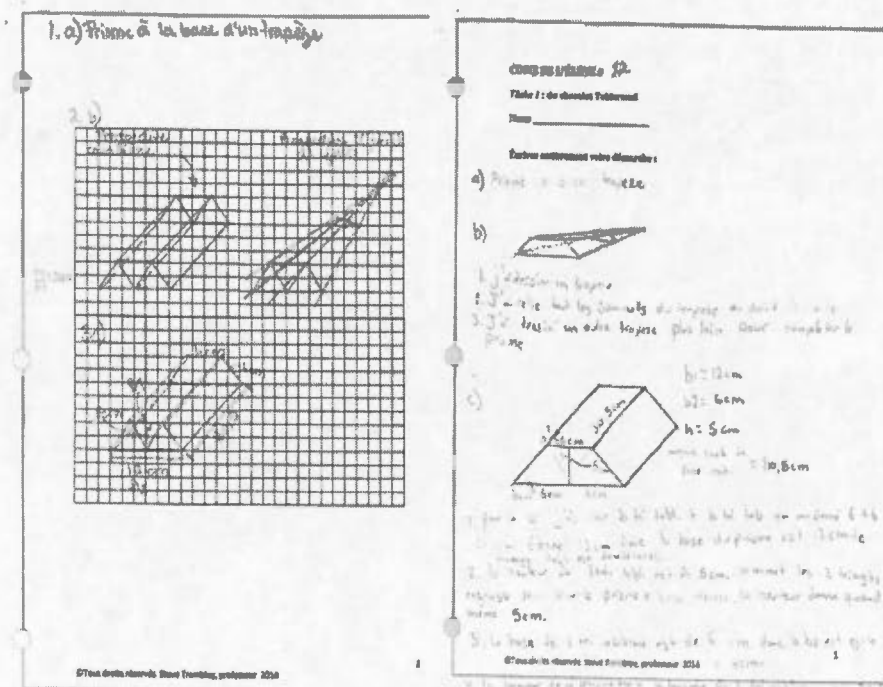


Figure 4.18 Confusion dans les types de représentation 2D (copies #9 et 12)

Une autre difficulté que nous allons analyser se retrouve dans les copies #13, 19, 29 et 30 (voir figure 4.19) et concerne l'habileté de visualisation interne, c'est-à-dire, la capacité à produire des images mentales des formes des faces constituant le solide, de combiner et d'analyser ces images mentales afin d'élaborer un développement plan de l'objet 3D. Nous constatons que cette difficulté s'est manifestée par un « manque » de rectangles dans le développement plan du prisme à base trapézoïdale formé par 3 barres Toblerone. Par exemple, dans la copie #29 (figure 4.19), cet élève a bien représenté les 2 bases trapézoïdales du nouveau prisme, mais il a dessiné 3 faces rectangulaires au lieu de 4 : la face rectangulaire du dessus du prisme n'est pas dessinée.

Nous constatons qu'il y a eu chez ces 4 élèves (productions écrites #13, 19, 29 et 30), un problème d'encodage d'informations-clés de l'objet 3D (nombre de formes dans le solide et leur disposition dans le développement plan) qui s'est produit lorsque ces élèves ont utilisé la visualisation externe, puis leur capacité à analyser et à combiner les images mentales de l'objet, conduisant à la représentation en développement plan. En conséquence, le rôle de la visualisation spatiale fut déterminant pour la *question c* de la tâche 1.

La même remarque s'applique aux élèves des copies #19 et #30 (voir figure 4.19), pour lesquelles il manque un rectangle dans le développement plan.

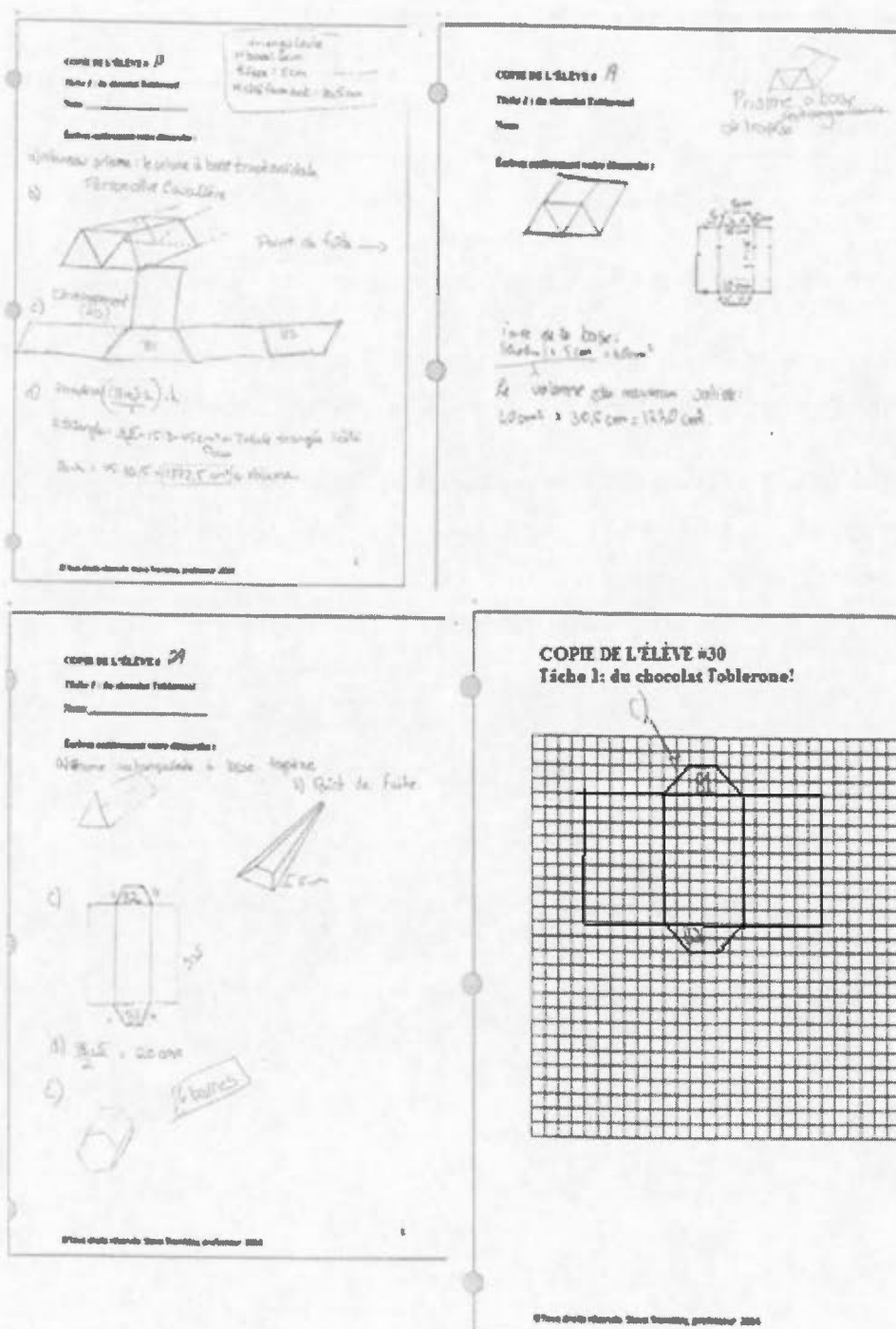


Figure 4.19 Difficulté de visualisation interne (copies #13, 19, 29 et 30)

Question d : Calcule le volume de ce nouveau solide.

Tel qu'indiqué dans notre analyse *a priori*, un élève ayant réussi cette question aura maîtrisé les éléments suivants :

- L'élève doit montrer qu'il maîtrise son aptitude au raisonnement mathématique.
- Il reconnaît ce qui est donné dans un problème et ce qu'il faut trouver ou faire.
- Il reconnaît quand et comment il faut utiliser des éléments auxiliaires (grande base B , petite base b , hauteur de la base h , hauteur du prisme H_{prisme}) dans un problème.
- Il est en mesure de comprendre les relations entre les éléments caractéristiques de figures géométriques à trois dimensions en utilisant la bonne formule de volume

$$\begin{aligned}
 \text{Volume prisme à base trapézoïdale} &= \frac{(B + b) \times h}{2} \times H_{prisme} \\
 &= \frac{(12 + 6) \times 5,2}{2} \times 30,5 = 1427,40 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Nous présentons un exemple d'une production d'élève avec un calcul de volume adéquat à la figure 4.20 :

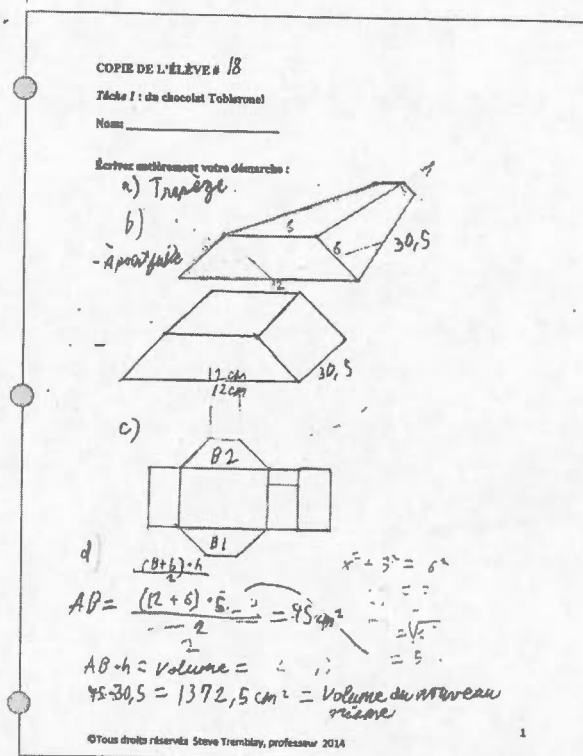


Figure 4.20 Production d'élève appliquant correctement la formule du volume d'un solide (copie #18)

Maintenant, nous allons analyser les 10 copies d'élèves ayant des réponses erronées. À cette fin, nous allons utiliser notre grille d'analyse des difficultés se manifestant dans l'application des formules de volume (voir figure 4.3).

Difficulté à repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale

Plus spécifiquement, c'est la confusion hauteur de la base du prisme avec la hauteur du solide. Cette difficulté s'est manifestée dans les copies # 15, 10, 19, 20, 28.

Dans la copie #15 (voir figure 4.21), l'élève a décomposé la forme du trapèze de la base du nouveau prisme en 3 triangles isométriques à partir de ce qu'il a vu des 3 objets physiques.

Puis, il a utilisé la relation de Pythagore pour déterminer la mesure de la base d'un triangle (triangle qu'il n'a pas considéré comme étant équilatéral) ; il a procédé comme suit :

- mesure de la moitié de la base = $\sqrt{6^2 - 5^2} \approx 3,32$ cm donc, la mesure de la base $\approx 6,64$ cm
- calcul de l'aire d'un demi-triangle : $\frac{(6,64 \times 5)}{2} = 16,6 \text{ cm}^2$
- mais il a confondu la hauteur de la base trapézoïdale avec la hauteur du prisme dans son calcul d'aire :
$$\text{Aire base trapézoïdale} = \text{Aires des triangles} \times 5 = 5 \times 16,6 = 83 \text{ cm}^2$$
- finalement, il a calculé l'aire du nouveau prisme en multipliant par 3 (pour 3 barres Toblerone) $3 \times 83 \text{ cm}^2 = 249 \text{ cm}^2$. Cet élève a donc confondu l'aire totale avec le volume du solide.

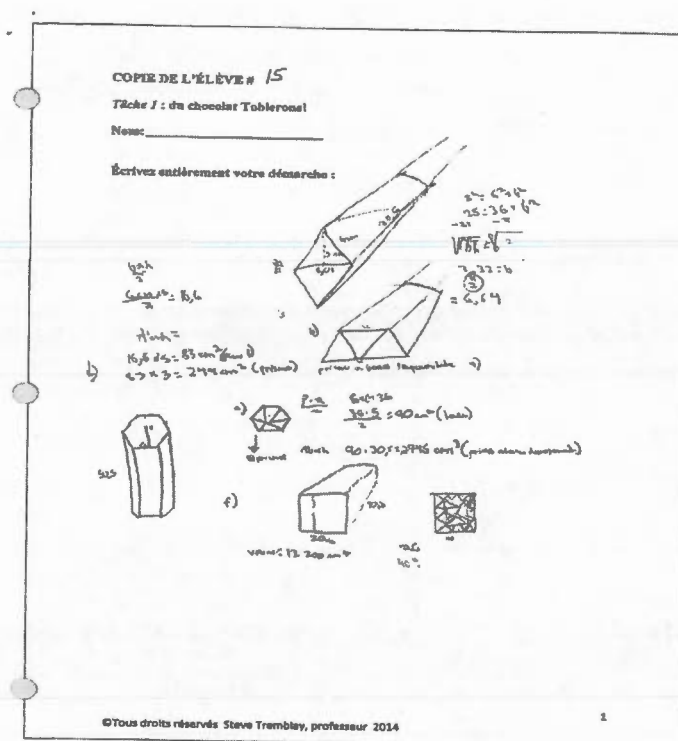


Figure 4.21 Confusion hauteur de la base avec la hauteur du solide
(copie #15)

Nous allons analyser une autre production écrite – copie #10, où la difficulté, confusion de la hauteur de la base du prisme ($h = 5 \text{ cm}$) avec la hauteur du solide ($H = 30,5 \text{ cm}$) s'est manifestée.

Toutefois, nous nous posons la question suivante : comment se fait-il que cet élève n'ait pas réussi à procéder au bon calcul de volume, puisqu'il avait bien identifié les éléments de la formule de volume du prisme droit à base trapézoïdale dans la représentation spatiale qu'il avait dessinée (développement plan) ? Lorsqu'il a procédé à son calcul de volume, il a utilisé comme hauteur du prisme 5 cm au lieu de $30,5 \text{ cm}$ (voir figure 4.22). Une des causes de cette confusion serait qu'il a perçu que la hauteur d'un prisme est celle où repose sa base.

Ainsi apparaît l'ambiguïté du mot hauteur — et celle du mot base qui lui est associé —, dont on ne peut pas savoir, si l'on n'est pas aidé par le contexte, de quel objet géométrique le segment en question est la « hauteur ».

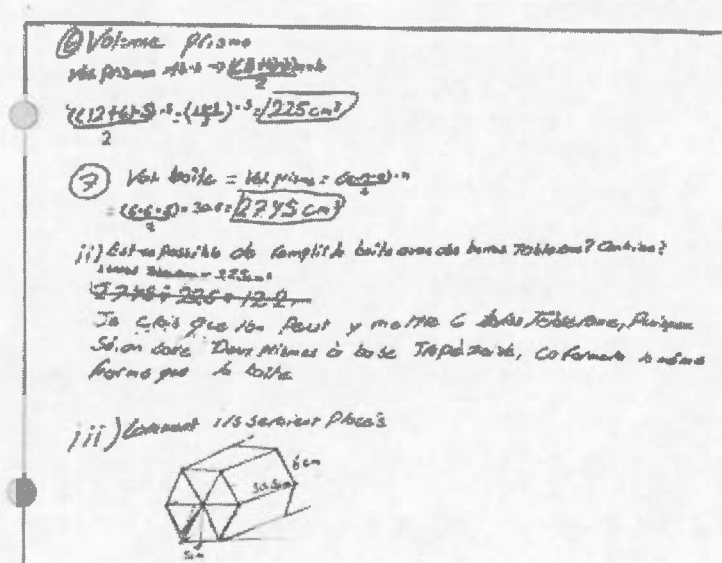


Figure 4.22 Confusion hauteur de la base d'un prisme avec la hauteur du solide

Une autre cause qui pourrait expliquer cette confusion proviendrait de la manière dont certains enseignants du primaire et du 1^{er} cycle du secondaire ne spécifient pas clairement ce

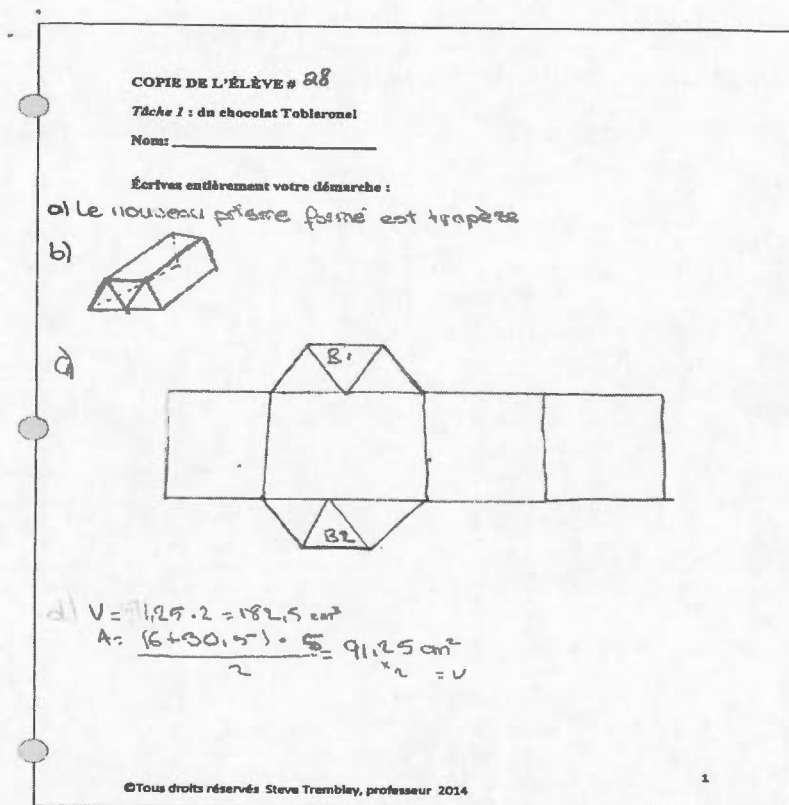


Figure 4.24 Confusion de la hauteur de la base du solide avec sa hauteur

En ce qui concerne la production écrite de la copie #19, cet élève a bien identifié les éléments de la formule de l'aire d'un trapèze sauf un : la grande base B . Comme l'expose la figure 4.25, il donne la valeur de la grande base B comme étant 10 cm au lieu de 12 cm. Il procède comme suit dans son calcul :

$$\text{Aire base} = \frac{(10 + 6) \times 5}{2} = 40 \text{ cm}^2$$
$$\text{volume prisme} = 40 \times 30,5 = 1220 \text{ cm}^3$$

Ce qui apparaît surprenant, c'est que dans son développement plan, cet élève avait bien indiqué par deux « traits » sur les côtés (symbole signifiant que les côtés sont isométriques) que la mesure du triangle équilatéral était de 6 cm. Or, nous croyons qu'il a confondu la

hauteur de la base (5 cm) de chaque triangle équilatéral formant la base trapézoïdale du prisme droit, avec la mesure de son côté qui est de 6 cm. Ainsi, il a eu une difficulté à repérer certains éléments de la formule de volume d'un prisme droit à base trapézoïdale dans la représentation en développement plan qu'il a produit sur sa feuille de papier.

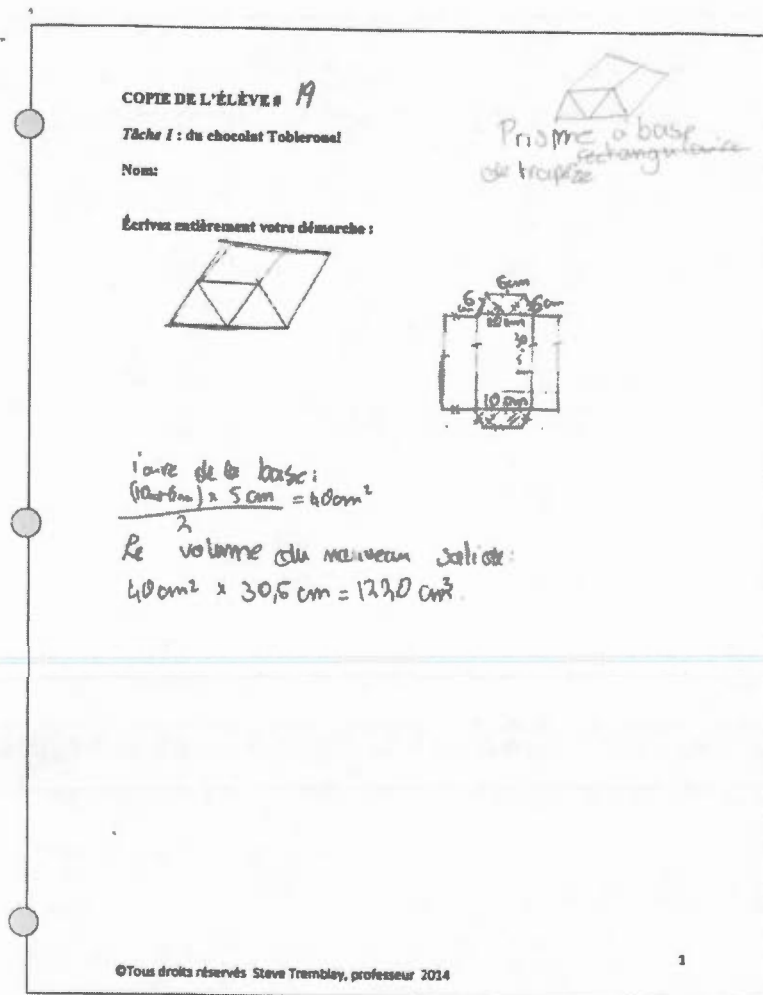


Figure 4. 25 Repérer la « bonne » mesure d'un côté d'une base d'un solide décomposable (copie #19, p. 1)

Difficulté à reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule (un solide décomposable).

Dans la production écrite #6 (voir figure 4.26), l'élève a utilisé la formule de volume d'une pyramide au lieu de celle d'un prisme droit régulier à base trapézoïdale donc, il a confondu la classe de solides à laquelle s'applique la formule de volume. Puis, il a calculé l'aire de la base d'une barre :

$$\text{aire base} = \frac{(6 \times 5)}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

et a écrit :

$$\begin{aligned} \text{Aire de la base du prisme à base trapézoïdale} &= 3 \times \text{aire d'une base} \\ &= 3 \times 15 = 45 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{volume prisme à base trapézoïdale} &= \frac{\text{Aire base} \times h}{3} \\ &= \frac{(45 \times 30,5)}{3} = 457,5 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

où h est la hauteur du prisme

De plus, la difficulté de reconnaître à quelle classe de solide s'applique la formule de volume est liée à une autre difficulté chez l'élève : une conception tout à fait procédurale de la formule. Manifestement, cet élève ne s'est pas appuyé sur un raisonnement à partir de sa représentation spatiale, que ce soit celle du développement plan ou bien celle de la représentation en perspective cavalière. Ainsi, la mémorisation des formules de volume n'est que plus difficile, car elles n'ont pas de base sur laquelle s'appuyer.

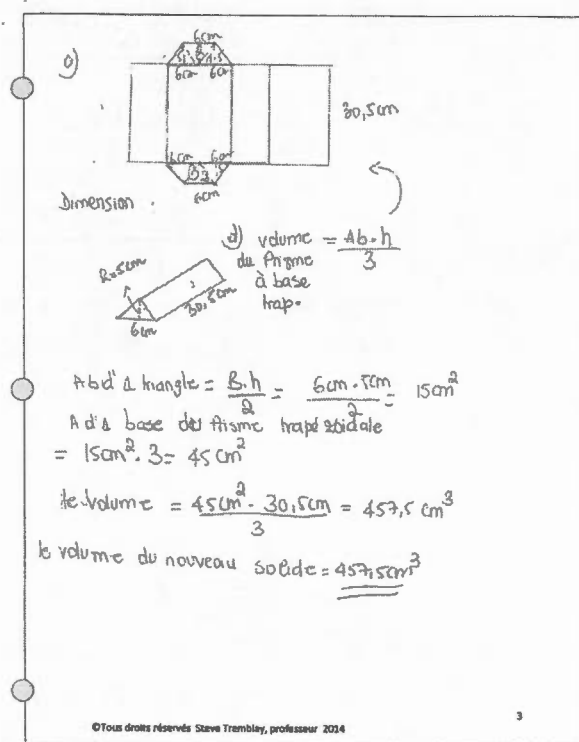


Figure 4.26 À quelle classe de solides s'applique la formule de volume ?
(copie #6)

Autres types de difficultés associées au calcul de volume

Nous avons constaté que certaines de nos données ne pouvaient être analysées à l'aide de nos grilles d'analyse. Toutefois, les difficultés de ces élèves ne sont pas significatives pour notre étude. Nous allons donc simplement produire une liste de ces difficultés :

- formule de volume erronée (copie #21)
- un élève a calculé l'aire totale du prisme à base trapézoïdale au lieu de son volume (copie #16)
- erreur de calcul dans les opérations mathématiques de base (copie #11 et 30)

En résumé, à la *question d*, où il fallait que les élèves procèdent au calcul de volume du prisme droit à base trapézoïdale, nous constatons que pour les 21 élèves parmi les 33 ayant réussi cette question, à chaque fois, ces élèves avaient produit un développement plan adéquat sur lequel ils avaient identifié, sur la représentation 2D, les éléments de la formule de volume du prisme droit à base trapézoïdale (grande base B , petite base b et hauteur h du trapèze, hauteur H du solide). Qui plus est, puisque ces élèves avaient construit le solide par la juxtaposition correcte des 3 barres, ils ont forcément eu recours à la compétence de visualisation externe pour identifier les constituants du solide, de même qu'à la compétence de visualisation interne en créant des images mentales dynamiques des faces du solide. En conséquence, pour ces élèves, la visualisation spatiale fut non seulement d'une grande utilité, mais elle a permis aussi de faire des liens entre les constituants du prisme pour appliquer adéquatement la formule de volume.

Question e :

Pour le temps des Fêtes, la compagnie Toblerone a mis sur le marché de grosses boîtes qui contiennent chacune un bon nombre de barres Toblerone. Ces boîtes sont des prismes à base hexagonale. La mesure du côté de la base est de 6 cm, la mesure de l'apothème de la base est de 5 cm et la hauteur de la boîte est de 30,5 cm. Est-il possible de remplir ces boîtes sans laisser d'espace vide ? Si oui, avec combien de barres Toblerone par boîte ? Représente en perspective cavalière la boîte de carton en montrant avec le dessin comment y sont placées les barres.

Nous allons nous servir des grilles 4.1 (visualisation directe), 4.2 (visualisation mentale) et celle du tableau 4.1 (conflit cognitif « vu/su ») pour analyser les apprentissages des élèves afin de répondre aux questions suivantes :

Quelles sont les traces laissées par les élèves pour identifier le conflit « vu/su »?

Quelles sont les traces laissées par les élèves montrant des manifestations de la visualisation?

La *question e* – tâche 1 comporte trois aspects. Un premier aspect de la tâche exigeait de l'élève qu'il utilise sa visualisation externe (constituants de l'objet 3D) et sa visualisation

interne en se fabriquant des images mentales des 6 barres de chocolat Toblerone assemblées selon les faces latérales rectangulaires pour former un prisme droit régulier à base hexagonale. Dans un deuxième temps, il devait dessiner une représentation en perspective cavalière afin de montrer comment sont placées ces 6 barres et en expliquant qu'il n'y a pas d'espace vide entre ces barres.

Un élève qui a réussi cette question a réalisé des apprentissages s'il a compris qu'un boîtier de barres de chocolat Toblerone contient exactement 6 barres de chocolat qui constituent 6 prismes droits réguliers à base triangulaire. De plus, ce boîtier forme un nouveau solide : un prisme droit régulier à base hexagonale. Parmi les 33 élèves, 29 élèves ont écrit des réponses adéquates (taux de réussite de 90,9%) en se servant de leurs connaissances spatiales : c'est-à-dire la nomenclature des prismes, les éléments caractéristiques d'un prisme à base hexagonale, l'emplacement des deux bases, des faces latérales, de la hauteur de la base, de l'apothème et de la hauteur du prisme, les mesures de ces caractéristiques, etc.

Bien que dans les directives de la *question e*, nous n'exigions pas d'effectuer le calcul de volume du prisme droit régulier à base hexagonale, nous envisageons que cela constitue une autre manière de procéder pour répondre à la *question e* (voir analyse *a priori* de la tâche 1, chapitre 3 section 3.3.2).

Le calcul du volume du prisme droit régulier à base hexagonale donne 2745 cm^3 avec pour mesure de l'apothème $a \approx 5 \text{ cm}$, ou $2854,80 \text{ cm}^3$ si l'élève utilise pour mesure de l'apothème $a \approx 5,2 \text{ cm}$. Voici les compilations des réponses pour cette question (partie « calcul de volume ») :

Parmi les 33 élèves :

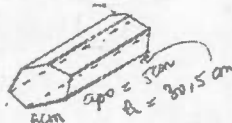
- 30 élèves ont obtenu des réponses adéquates : avec représentation 2D et/ou calcul de volume du boîtier ;
- 11 élèves ont dessiné le boîtier en perspective cavalière et ils en ont aussi calculé son volume, soit 2745 cm^3 : les copies # 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 24, 25, 32

Ce qui signifie que 33,3 % des élèves ont cru bon de déterminer le volume pour répondre à la *question e* – tâche 1 ;

- 18 élèves ont uniquement dessiné la représentation en perspective cavalière du boîtier : les copies # 1, 2, 9, 10, 12, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33
- 1 élève n'a pas répondu à la question : copie #22
- 2 élèves ont soit des calculs erronés, soit des représentations en perspective cavalière erronées : copies #5, 16

Voici un exemple d'une production écrite où l'élève a réussi la question e – tâche 1 :

④



le nombre de tablettes par boîte est de 6.

Volume d'i boîte = $Ab \cdot h$

$Ab = \frac{Cnq}{2} = \frac{6cm \cdot 6 \cdot 5cm}{2} = 90cm^2$

Volume = $90cm^2 \cdot 30,5cm = 2745cm^3$

Volume d'i tablette = $Ab \cdot h$

$Ab = \frac{Bh}{2} = \frac{6cm \cdot 5cm}{2} = 15cm^2$

$V = 15cm^2 \cdot 30,5cm = 457,5cm^3$

Volume de 6 tablettes = $457,5cm^3 \times 6$
 $= 2745cm^3$

Réponse à la question e : Non, il ne restera pas d'espace vide car le volume des tablettes correspond au volume de la boîte.

©Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

Figure 4.27 Production écrite de la question e – tâche 1 (copie #6, p. 4)

Comme le montre la compilation des résultats, tous les élèves qui ont répondu à la *question e* ont réussi leur apprentissage sans nécessairement calculer le volume du boîtier. Ce qui signifie que la visualisation spatiale a joué un rôle important.

Par exemple, lorsque l'élève a terminé son dessin en perspective cavalière, il va observer puis déduire qu'il n'y a pas d'espace vide dans le boîtier formé par les six prismes droits réguliers à base triangulaire. Qui plus est, lorsque l'élève va décrire (en mots) en écrivant sur son dessin la position des 6 barres *Toblerone*, il va effectivement réaliser et déduire qu'il a devant lui un prisme droit régulier à base hexagonale.

Nous allons maintenant analyser les productions d'élèves ayant des réponses erronées en utilisant nos grilles d'analyse.

i) Analyse avec la grille du conflit cognitif « vu/su »

Représentation en perspective cavalière sans calcul de volume

Dans la production écrite de la copie #5 (p. 4) apparaît une erreur dans la représentation en perspective cavalière dans le dessin de la 2^e base (positionnée à l'arrière). On s'attendait à ce que l'élève ait reproduit correctement la base hexagonale, mais il a reproduit une forme plutôt « inusitée » telle qu'exposée à la figure 4.29 :

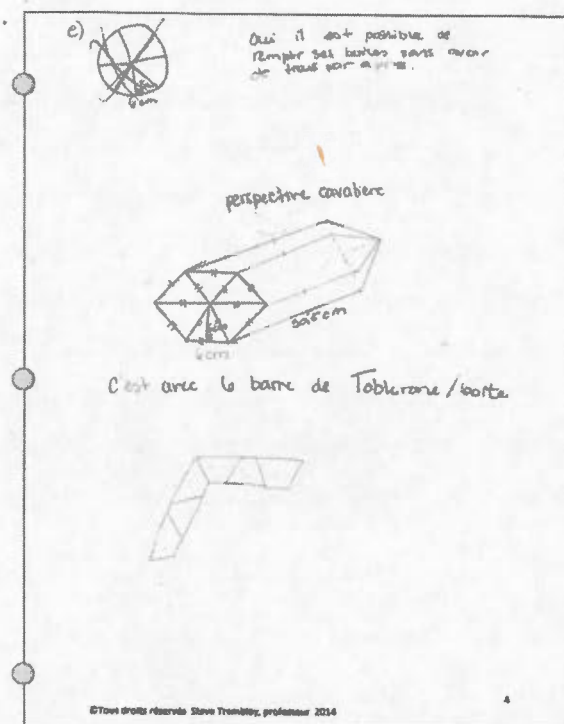


Figure 4.28 Perspective cavalière déficiente dans une production écrite
– question e (copie #5, p. 4)

Dans la première étape de la technique de représentation de la perspective cavalière, une face de l'objet 3D (le boîtier qui est un prisme droit à base hexagonale) doit se trouver dans le même plan que la feuille (plan frontal) sur lequel l'objet 3D est représenté. En observant la représentation 2D exposée à la figure 4.28, l'élève maîtrise cette étape.

Il y a présence de deux autres erreurs concernant l'encodage d'informations clés que nous avons exposées à la figure 4.29. Dans cette figure, nous avons agrandi le dessin de l'élève de la copie 5 (à gauche dans la figure 4.29) en ajoutant des traits plus nets et en identifiant les sommets d'une partie du dessin (un des 6 prismes droits réguliers à base triangulaire) par les lettres ABCDEF. La première erreur apparaît dans le dessin des arêtes obliques (appelées « fuyantes »), dont une qui n'est pas parallèle aux autres formant le prisme droit régulier à base triangulaire: si l'on regarde attentivement, la face triangulaire DEF a subi une rotation de

180° au lieu d'être parallèle et de conserver la même forme que sa face opposée, soit la face triangulaire ABC. En fait, cette rotation constitue la deuxième erreur.

Nous allons analyser la première erreur selon le conflit cognitif « vu/su ». L'une des fuyantes (trait AE désigné par une des flèches à la figure 4.29) obliques d'un des prismes droits à bases triangulaires formant le prisme droit à base hexagonale semble tracée en parallèle (le *vu*), mais en réalité, l'élève savait (le *su*) que cette fuyante— qui devrait être perpendiculaire au plan frontal de la feuille de papier —est un segment passant du point A au point E (voir notre dessin à droite de la figure 4.29), et ce dit segment n'est pas parallèle aux deux autres fuyantes apparaissant dans le prisme droit à base triangulaire (dessin de l'élève). En fait en géométrie de l'espace, une droite perpendiculaire au plan frontal de la feuille de papier et la droite passant par les points AE, sont des droites gauches.

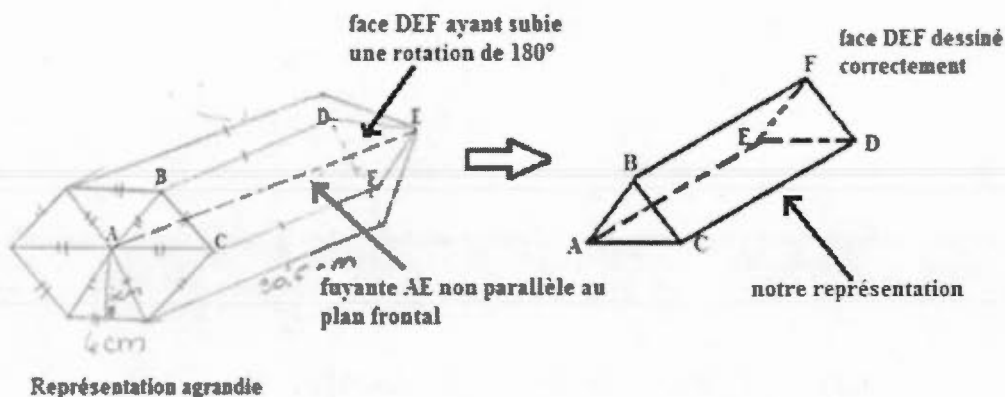


Figure 4.29 Conflit cognitif « vu/su » apparaissant dans la perspective cavalière

L'élève a donc perdu une autre information-clé : le parallélisme dans l'espace n'a pas la même signification que le parallélisme en géométrie plane. De plus, l'élève sait que dans les conventions d'une représentation en perspective cavalière, les bases d'un prisme sont dessinées en « vraie grandeur » et les segments homologues sont parallèles. Qui plus est, la face de l'objet (base triangulaire du prisme) qui se trouve dans le plan frontal de la feuille de papier est parallèle et isométrique à sa face opposée (la 2^e base triangulaire).

En ce qui concerne la troisième étape de cette technique de représentation où la mesure des « fuyantes » est réduite environ de moitié par rapport à la face située au premier plan, elle est adéquate.

En conséquence, nous avons des éléments de réponses pour notre 3^e question de recherche. Ainsi, la compréhension des relations d'incidence, de parallélisme et de perpendicularité dans l'espace (connaissances spatiales) – doit être bien développée et maîtrisée par l'élève dans une situation problème du type de la tâche 1, en lien avec la visualisation spatiale dont le rôle est de produire des images mentales des faces latérales (6 rectangles isométriques) et des bases (2 hexagones réguliers) et ce, pour réaliser une représentation en perspective cavalière du solide.

Qui plus est, la visualisation interne agira en interdépendance avec l'encodage d'informations clés (connaissances spatiales) explicitées dans les paragraphes précédents pour aider l'élève à produire une représentation en perspective cavalière du prisme droit à base hexagonale.

Dans la prochaine section du mémoire, nous allons présenter les résultats de la tâche 2 – pauvre Octaèdre!, ainsi que leurs analyses.

4.3.2 Analyse de la tâche 2 : pauvre Octaèdre!

Nous allons d'abord présenter les résultats pour la tâche 2 en exposant le taux de réussite pour chaque question, les difficultés vécues ainsi que leur nombre d'occurrences dans les productions écrites des élèves.

Tableau 4.3 Types de difficultés décrites par la recherche et relatives à la tâche

Tâche 2 (5 élèves absents)	Taux de réussite	Difficulté	Nombre d'occurrences de la difficulté	Numéro production écrite (sur 28 productions)	Absences de démarche écrite (% d'occurrence)
Question a	$\frac{10}{28} = 35,7 \%$	Visualisation externe et/ou interne des formes et déconstruction dimensionnelle	$\frac{18}{28} = 64,3 \%$	#3, 4, 6, 8, 9, 10, 11,, 14, 15, 16,18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26	s/o
Question b	$\frac{10}{28} = 35,7 \%$	Visualisation externe et/ou interne des arêtes, des sommets et des faces et déconstruction dimensionnelle	$\frac{18}{28} = 64,3 \%$	#3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 26, 27 et 29	s/o
Question c	$\frac{2}{28} = 7,1 \%$	Conflit cognitif « vu/su » (non prise en compte d'informations spatiales)	$\frac{11}{28} = 39,3 \%$	#3, 6, 7, 16, 18, 22, 27 #12, 15, 17, 19	$\frac{5}{28} = 17,9 \%$ #4, 5, 14, 21, 29
		Non-conservation des rapports des longueurs	$\frac{1}{28} = 3,6 \%$	#24	s/o

		Combinaisons de deux difficultés : visualisation interne et conflit cognitif « vu/su »	$\frac{9}{28} = 32,1 \%$	#8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 26, 28	s/o
		Confusion dans les types de représentations	$\frac{1}{28} = 3,6 \%$	#20	s/o
Question d Perspective cavalière	$\frac{2}{28} = 7,1 \%$	Visualisation interne	$\frac{19}{28} = 67,9 \%$	#1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 26, 27, 28	$\frac{6}{28} = 21,4 \%$ #7, 11, 12, 19, 21, 23
Perspective à 1 point de fuite	$\frac{1}{28} = 3,6 \%$	Visualisation interne et dessiner un objet 3D en perspective à 1 point de fuite	$\frac{1}{28} = 3,6 \%$	#15	$\frac{26}{28} = 92,9 \%$
Question e	$\frac{2}{28} = 7,1 \%$	Repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale de l'octaèdre tronqué	$\frac{2}{28} = 7,1 \%$	#12 et 14	$\frac{21}{28} = 75 \%$
		Visualisation externe et interne	$\frac{4}{28} = 14,3 \%$	#7, 9, 10 et 26	

Nous allons d'abord synthétiser les éléments de réponses que nous avons obtenus à nos questions de recherche :

Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?

Pour les questions *a* et *b* de la tâche 2, il y a eu une difficulté majeure chez les élèves à réaliser les visualisation interne et externe de l'octaèdre tronqué, puisque les taux de réussite ont été faibles (35,7 %). D'après notre grille 4.2, le processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) a été une difficulté importante parce, d'une part, les élèves ont dû réaliser une analyse mathématique de l'octaèdre tronqué et de ses constituants en les décomposant mentalement (nouvelles faces, leur forme, leurs dimensions et leurs nombres) et d'autre part, parce qu'ils devaient reconstituer mentalement des parties de l'objet 3D cachées dans la représentation en perspective cavalière fournie avec la tâche.

Nous avons constaté la présence de deux types de difficulté à la *question c* : soit la présence d'un conflit cognitif « vu/su » et une combinaison de la visualisation interne avec celle du conflit « vu/su ». Aussi, les rôles de la visualisation interne dans le processus d'encodage de l'octaèdre tronqué pour le dessiner en développement plan sont étroitement liés à la capacité de comprendre les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace.

Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

Pour les questions *a* et *b*, il y a eu une difficulté (75 %) chez les élèves à mobiliser des connaissances spatiales telles qu'être capable de percevoir les découpages dans l'octaèdre tronqué. De même, il y a eu une difficulté à visualiser mentalement les éléments de la formule de volume d'une pyramide droite régulière à base carrée (« demi-côté » de la base carrée, hauteur, apothème)

De plus, la difficulté à visualiser mentalement les coupes dans le solide s'est avérée un point névralgique pour produire un dessin en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué.

La compréhension de la relation d'incidence s'est avérée un atout, puisqu'elle a permis aux élèves de déduire des informations spatiales pour continuer le traitement de calcul du volume des 6 « petites » pyramides droites à base carrée. Nous sommes amenés à suspecter une corrélation forte entre l'habileté de visualisation mentale d'un objet 3D (images mentales dynamiques) et la production d'une représentation en développement plan.

Pour la question *d*, nous avons dégagé que l'habileté de visualisation mentale d'un objet 3D non présent physiquement (octaèdre tronqué) s'exerce de manière interdépendante avec la maîtrise de certaines connaissances spatiales (relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace).

De plus, l'habileté à élaborer des représentations en perspectives (cavalière et à 1 point de fuite) de l'octaèdre tronqué (*question d*), a permis aux élèves de rendre visible sur papier et d'indiquer les bons emplacements, des éléments de la formule de volume de la pyramide droite à base carrée.

En ce qui concerne la *question e*, nos résultats tendent à montrer l'existence d'un lien significatif entre la visualisation spatiale et la compréhension de la structure du solide (octaèdre tronqué) pour calculer son volume. De plus, le très faible taux de réussite à la *question e* (7,1 %) pourrait s'expliquer par le haut niveau de complexité de la visualisation spatiale exigée dans les sections de coupe de l'octaèdre.

Pour la tâche 2, nous allons utiliser nos 4 grilles d'analyse des tâches (voir section 4.2).

Nous allons traiter les *questions a et b* de manière simultanée parce qu'elles sont spécifiquement liées. En effet, visualiser le nombre de faces et les formes d'un objet 3D nécessite de visualiser le nombre de sommets et d'arêtes. Ces deux questions ont obtenu le même taux de réussite, soit 35,7 %.

Analyse des réponses obtenues aux questions a-b :

Combien le nouveau polyèdre d'Amélie a-t-il de faces ? De quelles formes sont-elles ?

La réponse attendue à cette question est que le nouveau polyèdre a 14 faces, dont 6 carrés et 8 hexagones. Parmi les 33 élèves du groupe, cinq élèves étaient absents au moment de l'expérimentation. Nous avons donc analysé 28 productions écrites. Dix élèves ont obtenu la réponse exacte, soit un taux de réussite de 35,7 %.

Voici une retranscription d'une production écrite (copie #2) comportant une solution adéquate où l'élève a indiqué une manière de procéder pour déterminer le nombre de faces et leurs formes ainsi que le nombre de sommets et d'arêtes :

- a) « 8 faces de l'octaèdre + 6 face coupé = 14 faces dont 8 de forme hexagonale et 6 de forme carré »

coupe de forme carrée

b)

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \swarrow \\ \text{sommet} = 6 \cdot 4 = 24 \\ \text{arêtes} = 36 \longrightarrow \text{compter sur image} \end{array}$$

Nous relevons que cet élève a utilisé la compétence de visualisation spatiale. Il y a essentiellement deux types de démarche pour répondre correctement à cette question (voir analyse *a priori* sous 3.4) : soit à partir de la visualisation externe de l'octaèdre, soit à partir de la visualisation interne en créant des images mentales dynamiques des faces de l'octaèdre tronqué.

Voici la production écrite de cet élève, exposée à la figure 4.30 :

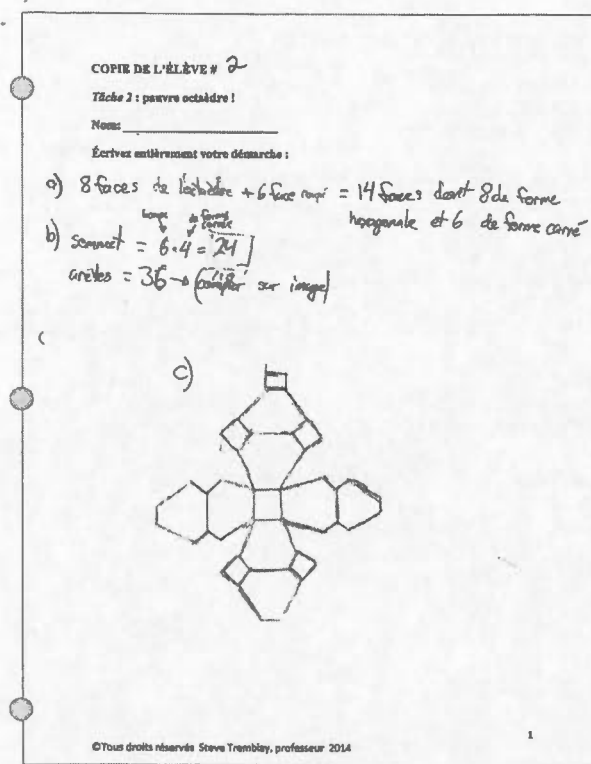


Figure 4.30 Visualisation externe des faces de l'octaèdre tronqué

Inventaires des réponses erronées à la question a – tâche 2 :

Pour les réponses erronées ou incomplètes, nous allons dans un premier temps les indiquer telles qu'elles sont apparues dans les productions écrites, puis nous procéderons à une classification sommaire.

- Copies #3 et #17 : « 14 faces ».
- Copie #4 : « 18 faces de forme trapézoïdale et de forme carrée »
- Copie #6 : l'élève a écrit « le nouveau polyèdre a 10 faces : 14 faces de trapèze et 6 faces de carrés »
- Copie #8 : « 14 faces, 8 trapèzes et 6 rectangles »
- Copie #9 : « le nouveau polyèdre a 8 faces, ils ont une forme hexagonale »
- Copie #10 : « 9 faces de trapèze »

- Copie #11 : « 18 faces »
- Copie #14 : « 14 faces, 6 carrées et 8 trapèzes »
- Copie #15 : « le nouveau polyèdre a 8 faces »
- Copie #16 : aucune trace
- Copie #18 : « 14 faces, les sommets coupés ce sont transformés en carrée et les faces latérales sont des trapèzes »
- Copie # 19 : « 14 faces de carrés »
- Copie #20 : « il y a 12 faces au nouveau polyèdre d'Amélie. Ils sont de formes trapézoïdales »
- Copie #21 : « 8 faces de trapèzes »
- Copie #22 : « 14 faces de forme rectangulaire »
- Copie #24 : « 14 faces de forme carrée »
- Copie #25 : « 14 faces de forme carrée »
- Copie #26 : « le nouveau polyèdre d'Amélie a 8 faces après avoir coupé les sommets. La forme est un hexagone »

Parmi les 18 réponses erronées à la *question a – tâche 2*, 9 élèves sur 18 ont indiqué le bon nombre de faces (14), mais sans identifier correctement de quelle nature sont ces faces. De plus, 8 élèves ont prédit des faces trapézoïdales plutôt qu'hexagonales, ce qui signifie que lorsqu'ils ont visualisé les coupes de l'octaèdre, ils ont été capables de compter mentalement le nombre de faces résultant à l'aide de la visualisation externe ou interne, mais ils ont eu de la difficulté à identifier la nature des formes résultantes. Cela pourrait suggérer que la visualisation spatiale passe par une « structuration » des arêtes, des faces et des sommets de l'octaèdre tronqué.

Les 10 autres élèves qui ont obtenu des réponses erronées ont une difficulté marquée à percevoir les sections de coupe lors de la troncature, soit à les visualiser directement sur le dessin en perspective cavalière de l'octaèdre, soit à les visualiser mentalement.

La *question a* de la tâche 2 se révèle donc révélatrice quant à notre deuxième question de recherche : *Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches*

de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?

Pour les élèves qui ont réussi la *question a*, ils ont utilisé leurs connaissances spatiales (voir cadre théorique section 2.2.3). De plus, ils ont utilisé la visualisation externe à partir du dessin de l'octaèdre fourni avec le questionnaire, puis ils ont recouru à la visualisation interne pour amorcer une déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) des formes des faces du nouveau solide : un octaèdre tronqué. Par exemple, l'élève a pu débiter par le découpage selon le plan ABCD et visualiser mentalement que la forme résultante de la face sera un carré (une 1^{re} base d'une des 6 « petites » pyramides à base carrée). Ensuite, il a pu déduire qu'il y aura dans le nouveau solide, 6 carrés à la suite de l'opération de troncature, puisqu'il y a 6 sommets dans l'octaèdre.

En utilisant un processus de déconstruction d'une face triangulaire de l'octaèdre, l'élève a fait usage de la visualisation interne pour créer une image mentale d'une nouvelle face qui sera, cette fois-ci, de forme hexagonale tout en se servant du raisonnement proportionnel puisqu'il s'agit d'une troncature au tiers de chaque arête ($\frac{1}{3} \times 6 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$). En l'occurrence, chaque arête qui mesurait 6 cm dans l'octaèdre sera « décomposée » en 3 segments isométriques de 2 cm et en conséquence, la nouvelle face sera un hexagone régulier. Finalement, l'élève a pu visualiser mentalement qu'il y aura 8 faces hexagonales dans l'octaèdre tronqué, une pour chacune des 8 faces triangulaires initiales dans l'octaèdre.

Question b : Combien ce polyèdre a-t-il de sommets ? Et combien d'arêtes ?

La solution est la suivante : le nouveau polyèdre créé contient 24 sommets et 36 arêtes.

Analyse des réponses obtenues à la question b : Combien ce polyèdre a-t-il de sommets ? Et combien d'arêtes ?

Dans les 28 productions écrites analysées, dix d'entre elles avaient la réponse exacte ce qui représente un taux de réussite de 35,7 %. Ces 10 élèves possèdent une bonne capacité de visualisation spatiale, c'est-à-dire qu'ils ont perçu les caractéristiques des formes, leur structure

géométrique en utilisant le dessin en perspective cavalière de ce solide. De plus, ils ont bien perçu les découpages dans l'octaèdre et l'organisation de ces découpages.

Dans cette question, nous avons répertorié 18 réponses erronées ou incomplètes. Voici l'inventaire de ces réponses obtenues, telles qu'elles apparaissent dans les productions écrites:

- copie #3 : 6 sommets, 20 arêtes
- copies #5, 8, 18 et 29 : 24 sommets, 32 arêtes
- copie #7 : 0 sommet, 16 arêtes
- copie #9 : 6 sommets
- copie #10 : 24 sommets, 12 arêtes
- copie #15 : 24 sommets, 30 arêtes
- copie #17 : 22 sommets, 32 arêtes
- copie #19 : 24 sommets, 38 arêtes
- copie #20 : 6 sommets, 10 arêtes
- copie #21 : 9 sommets, 16 arêtes
- copie #22 : 24 sommets
- copie #26 : 6 sommets, 6 arêtes
- copie #27 : 24 sommets, 13 arêtes
- les copies #11 et #16 ne contiennent aucune trace écrite

Nous dégageons que la difficulté majeure dans la *question b* – tâche 2 provient d'une combinaison de la visualisation interne et externe à partir du dessin en perspective de l'octaèdre (pour imaginer mentalement l'octaèdre tronqué) ainsi que la déconstruction dimensionnelle des formes. Les *questions a – b* de la tâche 2 sont spécifiquement liées à la visualisation spatiale de l'octaèdre tronqué ainsi que certains éléments de connaissances spatiales. En effet, on peut très bien être capable de visualiser par des actes imaginaires, les formes et le nombre de faces d'un octaèdre tronqué, que l'on ne voit ni physiquement ni dans une représentation 2D, sans être capable de dénombrer les sommets et arêtes, parce qu'il y a en plus la difficile gestion des sommets et arêtes communes à plus d'une face à faire. Par contre, on peut penser qu'on n'arrivera pas à dénombrer les sommets et les arêtes si on ne voit pas minimalement les faces et

leurs formes. Or, le processus permettant de comprendre la structuration des sommets, des arêtes et des faces issues d'une troncature au tiers de chaque arête, implique de comprendre les relations d'incidence et d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace, qui constituent des connaissances spatiales.

Toutefois, certains élèves n'ont pas eu le bon nombre de faces ou encore le bon nombre pour chacune des formes de ces faces, mais sont arrivés quand même à déterminer le bon nombre d'arêtes et de sommets, par exemple les élèves des copies #4 et 6. Qu'est-ce que cela signifie ? Cela nous apparaît contradictoire et nous n'arrivons pas à apporter une réponse précise à cette interrogation.

Qui plus est, nous précisons que l'élève a été dans l'obligation de produire une représentation 2D de l'octaèdre tronqué (pour les *questions c-d*) afin de voir « apparaître » ces relations d'incidence et d'inclusion concernant les points, les droites et les plans de l'octaèdre tronqué (organisation des faces et structuration des arêtes). En effet, nous avons vérifié dans les productions écrites que les élèves qui n'ont pas eu la bonne réponse furent les mêmes qui n'ont pas été capables de produire une représentation 2D de l'octaèdre tronqué.

En ce qui concerne le décompte d'arêtes (*question b*), ces élèves ont utilisé la visualisation externe à partir des traits de crayon qu'ils avaient indiqué sur le dessin en perspective cavalière de l'octaèdre du questionnaire, puis ils ont vraisemblablement compter les arêtes, soit une par une ou en utilisant une des procédures indiquées dans notre analyse *a priori* (voir Méthodologie section 3.4.2).

Nous serons plus en mesure de préciser notre pensée et d'apporter des réponses à notre deuxième question de recherche lorsque nous aurons analysé les réponses des élèves à la *question c* qui concerne la représentation de l'octaèdre tronqué en développement plan.

Question c : Dessine un développement plan de ce nouveau polyèdre.

Au tableau 4.3 sont présentés les résultats de la *question c* – tâche 2. Nous avons accepté les solutions de 2 élèves ayant produit un développement plan de l’octaèdre tronqué (voir figure 4.32). Le taux de réussite est donc de 7,1 %. Toutefois, nous précisons que les faces hexagonales qu’ils ont dessinées ne sont pas régulières. Nous considérons que ces 2 élèves possèdent une « bonne » visualisation spatiale et ont été capables, soit d’utiliser la visualisation externe ou soit de mobiliser la compétence de visualisation interne. Les bonnes réponses sont indiquées dans les copies numérotées 1, 2.

Voici les deux solutions acceptables provenant des productions écrites #1 et #2. Nous constatons que ces élèves ont également eu des réponses adéquates pour les *questions a – b* de la tâche 2 :

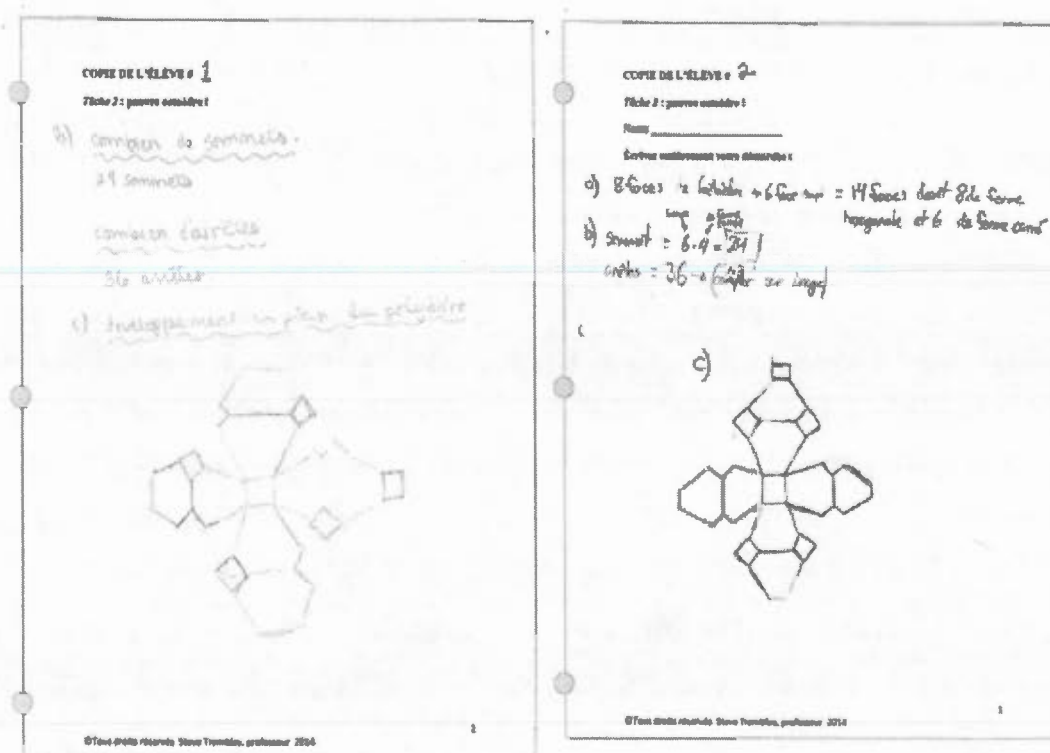


Figure 4.31 Productions écrites – développement plan de l’octaèdre tronqué (copies # 1 et 2)

Nous allons utiliser les grilles d'analyse 4.1 (visualisation externe), 4.2 (visualisation interne) et celle du tableau 4.1 (conflit cognitif « vu/su ») pour répondre aux questions suivantes :

Quelles sont les traces laissées dans les productions écrites des participants montrant qu'ils ont utilisé la visualisation spatiale ?

Quelles sont les traces laissées pour identifier le conflit « vu/su » ?

Éléments de visualisation externe

– Identification des constituants de l'objet 3D en traçant au trait de crayon sur le dessin en perspective cavalière de l'octaèdre, où se sont produites les coupes, afin de procéder au décodage d'informations clés : 14 faces (6 carrés, 8 hexagones), 24 sommets et 36 arêtes.

Éléments de visualisation interne

– Reconstituer des parties du solide (octaèdre) qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles et les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D.

– Visualiser le développement plan de l'octaèdre tronqué.

Analyse des réponses obtenues à la question c : dessine un développement plan de ce nouveau polyèdre.

Nous allons maintenant procéder à l'analyse des productions écrites ayant des réponses erronées.

Dans la réalisation d'un développement plan, l'élève doit mobiliser ses connaissances spatiales telles que : comprendre et repérer les relations d'incidence dans l'espace (contiguïté des faces), voir et envisager les plis, les prévoir sur le développement plan, repérer les incidences, les alignements et les faces coplanaires, pour déterminer les arêtes ou les sommets communs, énumérer les faces de l'octaèdre tronqué (ce qui suppose une structuration du solide). De plus, l'élève sait qu'il existe plusieurs développements plans différents pour un même solide.

Difficulté : conflit cognitif vu/su (copies #3, 6, 7, 16, 18, 22, 27, 12, 15, 17 et 19)

Analyse de ces productions écrites

Nous allons dans un premier temps, exposer un exemple de ces productions écrites où s'est manifesté un conflit cognitif « vu/su » (copie #6), puis les analyser selon la grille du tableau 4.1 (conflit cognitif vu/su).

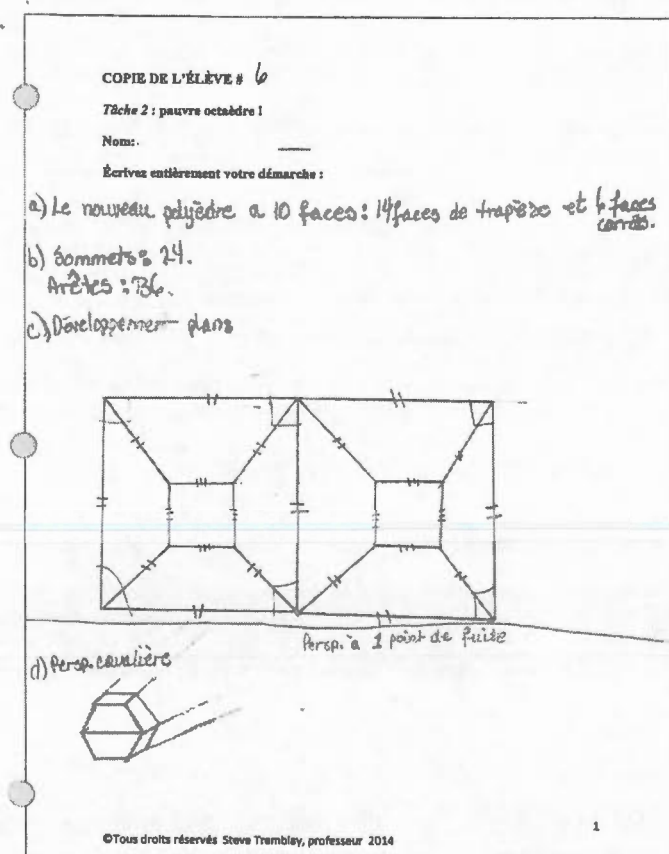


Figure 4.32 Production écrite (copie # 6)

Dans ces productions écrites, nous sommes capables de « voir » les manifestations du conflit cognitif « vu/su » puisqu'il y a eu des pertes d'informations clés non repérées par ces élèves et puisqu'ils ont eu de la difficulté dans le processus d'encodage pour donner sens à leurs représentations de l'objet 3D qu'ils ont dessinées après avoir construit l'objet 3D mentalement.

Un exemple d'information clé est celui des 6 coupes faisant « apparaître mentalement » des formes carrées qui sont également les bases des « petites » pyramides droites régulières à base carrée, détachées de l'octaèdre.

Nous allons exposer d'autres exemples d'informations clés qui n'ont pas été considérées ou mal interprétées (processus d'encodage). Dans la copie #6, nous remarquons dans le développement plan dessiné, qu'il manque 4 carrés ; néanmoins, on voit bien sur la production écrite (voir figure 4.33) que l'élève a dessiné des traits de « petits carrés » à 6 endroits différents sur le développement plan, ce qui signifie qu'il semble avoir bien perçu dans sa tête les coupes, mais qu'il a eu de la difficulté dans le processus d'encodage, c'est-à-dire de passer de ses images mentales créées à l'élaboration d'une représentation en développement plan. Autrement dit, une information-clé n'a pas été considérée lors de l'encodage, c'est-à-dire les formes carrées résultant des coupes dans le solide, d'où une difficulté à reconstruire l'objet mentalement et une difficulté supplémentaire à le représenter convenablement sur papier.

D'autres informations clés ont été non prises en compte, telles que les formes hexagonales lors de la troncature. En effet, l'élève a représenté 8 trapèzes au lieu de 8 hexagones réguliers. Ce qui nous apparaît contradictoire, c'est que cet élève avait bien indiqué, à la *question b*, le bon nombre de sommets et d'arêtes, mais son développement plan ne concorde pas avec la réponse qu'il a donnée à la *question b*. En conséquence, nous dégageons une difficulté à encoder les informations provenant de la visualisation interne de l'octaèdre tronqué qui serait dû à la compréhension des relations d'incidence et d'adjacente.

Dans la copie #7, la manifestation du conflit cognitif « vu/su » semble plus importante. Dans un premier temps, cet élève a indiqué comme réponse « 0 sommet et 16 arêtes » au lieu de 24 sommets. Nous nous sommes interrogés pourquoi ? Une réponse que nous proposons est la suivante : lorsqu'il a procédé à la coupe de l'octaèdre selon les 6 plans, il s'est posé fort probablement la question : « que se passera-t-il avec les anciennes faces ? Elles ont toutes disparu... donc il n'y a plus de sommets ! » Nous sommes amenés à penser que l'élève a

imaginé mentalement qu'après la troncature, les « anciens sommets S_1, S_2, S_3 et S_4 ont disparu et qu'ils ont fait place à 4 faces carrées. Ainsi, dans le décompte d'arêtes de ces nouvelles faces, il y aura 16 arêtes ($4 \text{ carrés} \times 4$).

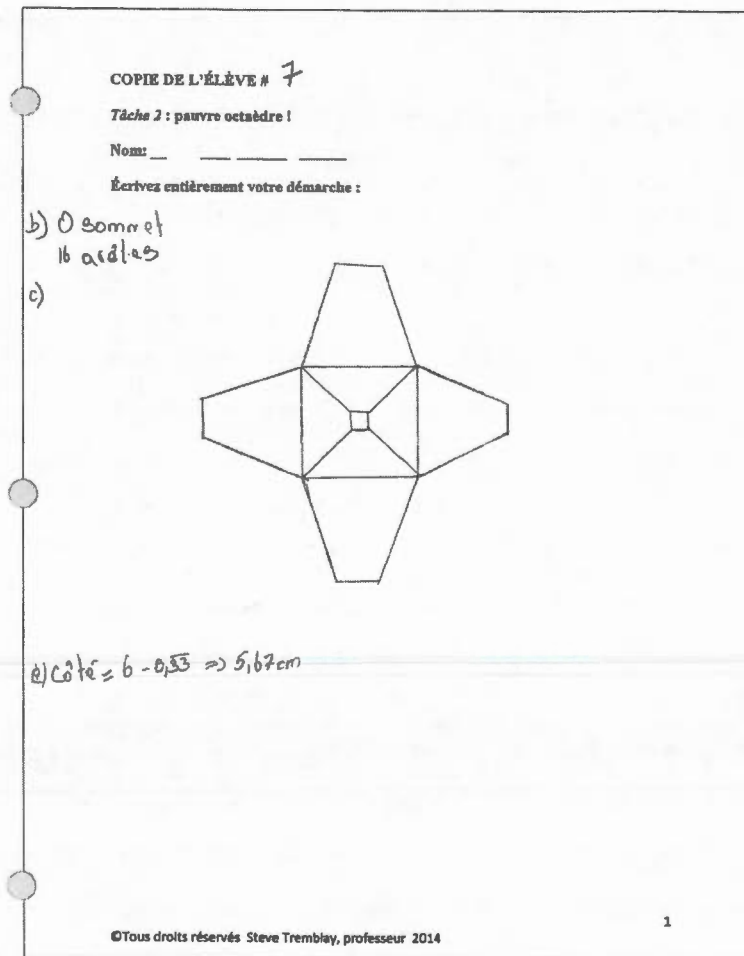


Figure 4.33 Production écrite (copie #7 p. 1)

De plus, dans le développement plan produit, il manque des éléments importants : cinq des six faces carrées ne sont pas représentées. On y voit qu'un seul « petit » carré au centre du développement. En l'occurrence, une 2^e information clé n'a pas été considérée, soit les coupes effectuées selon les 6 plans au tiers de chaque arête. De plus, les huit faces hexagonales

isométriques ne sont pas représentées : ce sont plutôt 4 trapèzes isométriques et 4 autres trapèzes également isométriques, mais plus petits que les premiers, qui sont dessinés. Ainsi, une 3^e information clé est manquante, ce qui signifie que cet élève a eu une difficulté dans la structuration de ses images mentales des formes carrées et hexagonales résultant des coupes de l'octaèdre. Par ailleurs, le nombre d'arêtes et de sommets indiqué à la *question b* ne concorde pas avec ceux dessinés dans le développement plan.

Ainsi, il nous apparaît que cet élève a vécu un conflit cognitif entre le *vu*, c'est-à-dire à imaginer mentalement les formes des faces, leur structuration dans l'espace à partir de la visualisation externe de l'octaèdre, et le *su*, c'est-à-dire les éléments de connaissances spatiales (compréhension des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement...)

Le conflit cognitif « vu/su » s'est aussi manifesté dans la production écrite – copie #27. Des informations spatiales n'ont pas été prises en compte lors de l'encodage pour la production du dessin en développement plan de l'octaèdre tronqué. En effet, dans cette production écrite, nous observons que l'élève a représenté 4 triangles, 4 trapèzes non réguliers et 1 rectangle au lieu des 6 carrés et des 8 hexagones réguliers. Toutefois, l'élève a bien identifié 14 faces (*question a*), mais elles ne concordent pas avec son développement plan. Il a déterminé le nombre d'arêtes (24) qui correspond au développement plan, et le nombre de sommets (13), qui ne correspond pas avec sa représentation 2D.

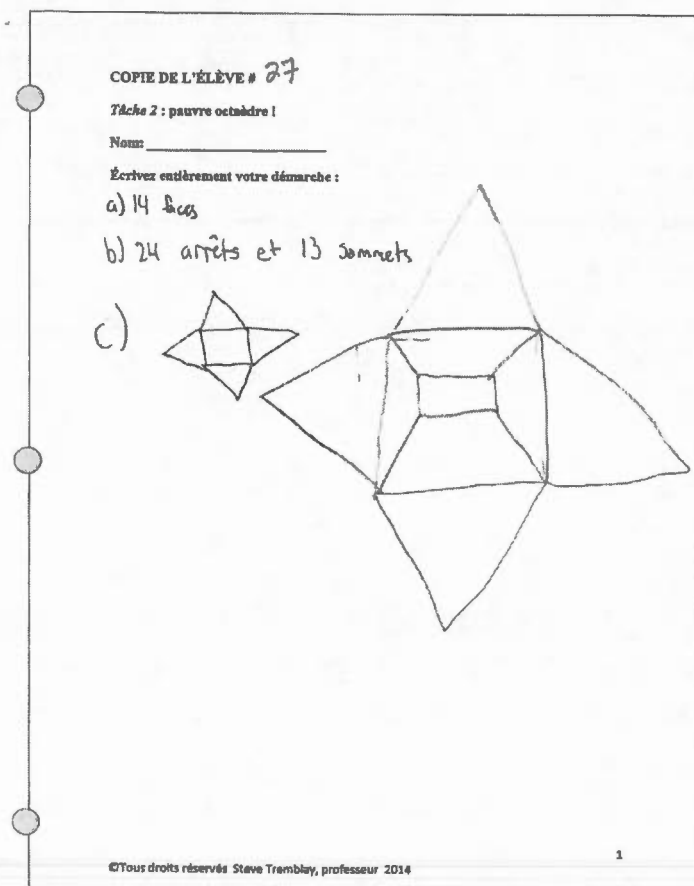


Figure 4.34 Production écrite (copie #27 p. 1)

Voici un autre exemple de production écrite (copie #18) dont nous allons discuter :

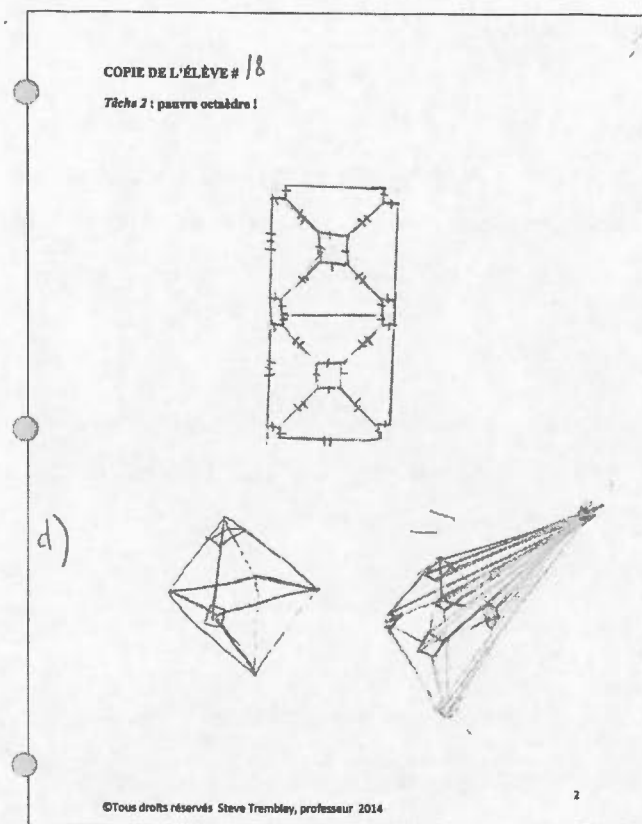


Figure 4.35 Développement plan de l'octaèdre tronqué (copie #18)

Pour la copie #18, nous repérons aussi des manifestations du conflit cognitif « vu/su ». Cependant, nous dégageons que cet élève a été plus conscient des formes carrées à représenter dans le développement de l'octaèdre tronqué que l'élève de la copie #6, car il a représenté au centre de son développement plan deux carrés qu'on imagine être les coupes du dessus (plan passant par les points ABCD, voir figure 4.34) et du dessous (plan passant par les points UVWX) du solide. De plus, il a dessiné ce que nous appelons « deux demi-carrés » associés aux sections selon les plans MNOP et QRST. De même, pour les 2 autres carrés résultant des coupes dans les plans EFGH, IJKL, l'élève a tracé des segments orthogonaux au lieu des formes carrées. Nous dégageons que cet élève a eu une difficulté à imaginer mentalement la coupe au

tiers de chaque arête (surout celles formant les 4 carrés) ainsi qu'à structurer l'organisation des arêtes, des faces et des sommets.

Nous sommes amenés à penser que l'élève a éprouvé des difficultés à combiner ces images mentales des 6 faces carrées, à reconstruire mentalement l'organisation des arêtes de ces faces ainsi qu'à bien encoder ces images mentales pour produire le développement plan du solide. Qui plus est, l'élève a dessiné 8 hexagones non réguliers, qu'il a nommé « trapèzes » dans ses réponses aux *questions a et b*.

La manifestation du conflit cognitif « vu/su » s'est présentée également dans la copie #22 et elle s'opère de manière analogue à celle des copies #6 et 18. Ainsi, dans la représentation 2D de cet élève, nous relevons 4 pentagones non réguliers, 4 hexagones non réguliers, 2 carrés et 4 figures que nous appelons « demi-carrés ».

Difficulté : rapport des longueurs non conservé dans le développement-plan

Nous allons d'abord exposer cette production écrite (figure 4.36) :

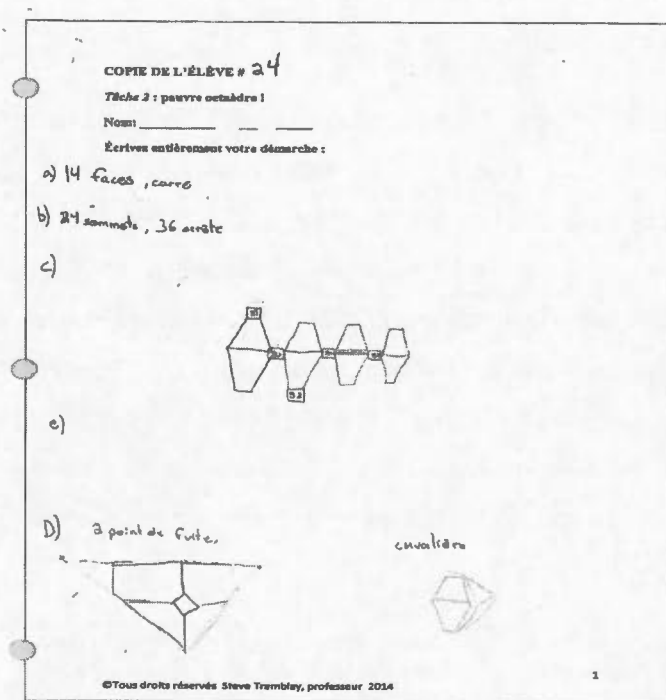


Figure 4.36 Développement plan erroné de l'octaèdre tronqué (copie #24)

La réponse obtenue à la *question c* de cette production écrite contient le bon nombre de faces, soit 14. Toutefois, en ce qui concerne la nature de la forme des faces, elle est erronée : 5 carrés sont dessinés ainsi que 8 trapèzes, au lieu de 8 hexagones réguliers. De plus, une convention de la représentation d'un objet 3D en développement plan stipule que le rapport des longueurs doit être conservé. Or, ce n'est pas le cas dans cette production.

Nous dégageons que cet élève n'a pas bien analysé et interprété que le rapport des longueurs est conservé dans un développement plan, que la visualisation spatiale des coupes pour chaque face triangulaire équilatérale de l'octaèdre selon les 6 plans ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX fera apparaître dans l'octaèdre tronqué (avec $k = \frac{1}{3}$), 6 carrés et 8 hexagones réguliers.

Combinaison de deux difficultés : visualisation interne et conflit cognitif « vu/su » (copies #8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 26 et 28)

Pour ces productions écrites, nous dégageons qu'il est difficile d'identifier la difficulté comme relevant uniquement du conflit cognitif « vu/su », et nous suggérons qu'elle est imputable au moins en partie à une visualisation interne insuffisante. C'est pourquoi nous avons attribué qu'il s'agit d'une combinaison de ces deux difficultés. Il nous apparaît clair que des informations spatiales n'ont pas été prises en considération lors du processus d'encodage (nombre et forme des faces, organisation des faces, des arêtes et des sommets, etc.), parce que les constituants du développement plan de l'octaèdre tronqué (arêtes, faces et sommets) dessiné ne correspondent pas, du moins dans certaines productions écrites (par exemple les copies #12 et 19), aux réponses indiquées aux *questions a-b*, qui rappelons-le sont étroitement liées au développement plan de ce solide.

Nous allons exposer un exemple de production écrite (copie #12) contenant ces difficultés, puis nous procéderons à l'analyse des productions écrites.

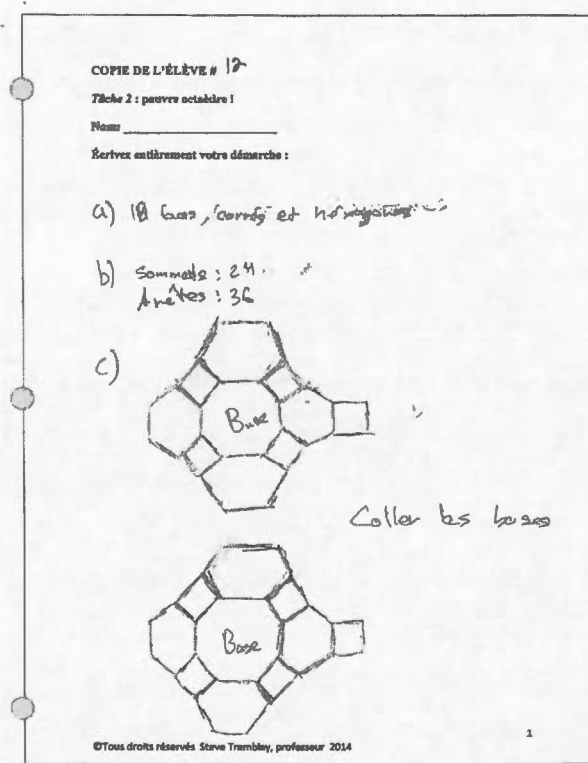


Figure 4.37 Développement plan erroné de l'octaèdre tronqué (copie #12, p. 1)

– difficulté de visualisation spatiale pour procéder au bon encodage d'informations spatiales pour donner sens à la représentation en développement plan.

Ces informations à prendre en compte sont les suivantes :

- visualisation (externe et/ou interne) des coupes effectuées selon les 6 plans passant par les points ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST, UVWX, où il y a une confusion quant à la nature des formes des faces : l'élève de la copie #8 les a nommées « trapèzes » et les a représentées par 8 hexagones non réguliers et a dessiné 6 rectangles au lieu de 6 carrés ; l'élève de la copie #10 a dessiné 2 octogones, 8 trapèzes et 8 carrés ; l'élève de la copie #11 a représenté 18 faces, soit, 8 hexagones non réguliers et 10 carrés, etc. ;
- le nombre d'arêtes que l'élève a décompté dans le solide n'est pas de 36 ;

- déplier telle face du solide pour s'imaginer l'articulation avec d'autres faces pour reconstruire ensuite mentalement l'objet 3D ; or, la reconstitution des pliages du développement plan ne permet pas ici d'obtenir le solide (ni même « un » solide). Par exemple, la copie #8 ;
- une difficulté à encoder convenablement les images mentales des faces à dessiner dans ces développements plans (copies #9, 10, 12, 13, 17).

La copie #12 (voir figure 4.37) expose 8 hexagones, 2 octogones et 10 carrés au lieu de 6. Nous dégageons que la relation d'incidence concernant les faces, sommets et arêtes a causé une difficulté quant à la visualisation d'images mentales. De plus, l'élève a indiqué « *coller les 2 bases* » dans sa production écrite et cela porte à interprétation : qu'a-t-il voulu dire par là ? Comment procéder pour ce « collage » ? par juxtaposition, par superposition ou quoi d'autre ? Nous ne pouvons analyser finement ce qu'il a voulu dire. Toutefois, lorsqu'il a procédé à l'encodage pour dessiner le développement plan de l'octaèdre tronqué, nous constatons qu'une information-clé a été mal prise en compte par l'élève (confusion quant à la nature des formes des faces), ce qui fait que nous éprouvons à notre tour, des difficultés à décoder la représentation de son patron. Ce qui nous amène à poser le problème du « codage versus décodage » dans les représentations des objets de l'espace.

Un codage dans une représentation plane d'un objet 3D concerne les conventions que l'auteur, ici l'élève, utilise pour produire sa représentation de l'objet. Le décodage est réalisé par l'individu (nous, en l'occurrence) qui « lit », « voit » la représentation de l'objet. Bien sûr, le décodeur doit être au courant des conventions employées par le codeur et ce dernier doit bien les maîtriser. D'où le problème de l'interprétation du message soit « la représentation de l'objet 3D » lui-même, pouvant être source d'illusions, d'erreurs pouvant donner lieu à des interprétations (des décodages) erronées.

En conséquence, nous dégageons que le rôle de la visualisation spatiale est très importante lors de l'élaboration d'un patron de l'objet 3D et qu'elle est interdépendante de la compréhension des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace.

– manifestation d'un conflit cognitif « vu/su »

Dans la copie #11, l'élève a représenté 10 carrés et 8 hexagones non réguliers dans son développement plan. Puisqu'il a éprouvé des difficultés de visualisation en se créant des images mentales erronées pour la relation d'incidence entre les faces, surtout celles des carrées, nous dégageons qu'il y a présence du conflit cognitif « vu/su » dans son développement plan pour les raisons suivantes :

– éléments de connaissances spatiales (figure 4.38, copie #11).

Nous sommes amenés à penser que l'élève sait (le *su*) qu'en coupant dans chaque triangle équilatéral dont l'arête mesure 6 cm dans un rapport $k = \frac{1}{3}$, cela amènera la création de 3 « petits » triangles équilatéraux dont l'arête sera de 2 cm et produira aussi 1 hexagone régulier dont l'arête sera de 2 cm.

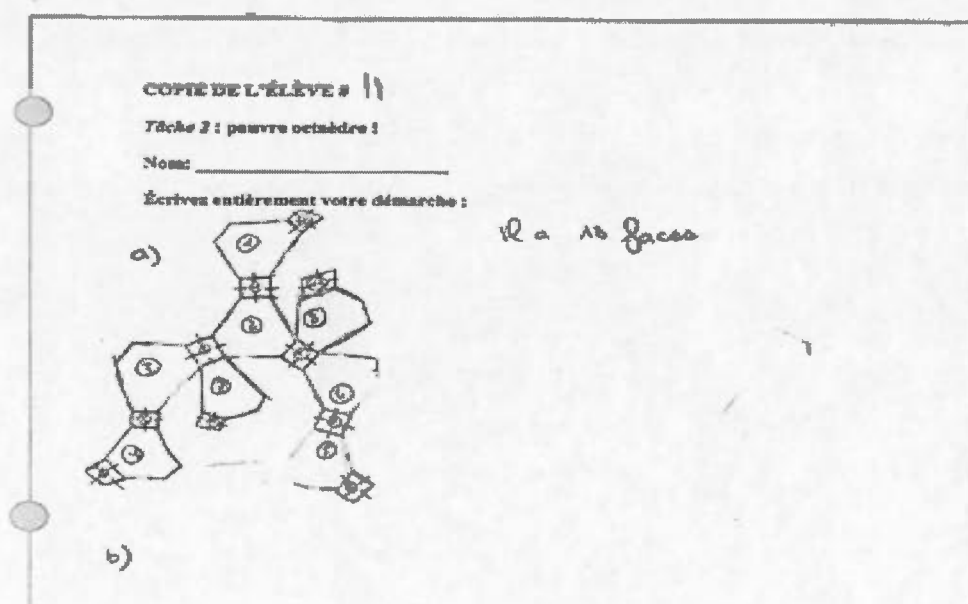


Figure 4.38 Production écrite (copie #11 p. 1)

– éléments de visualisation spatiale.

L'élève a créé des images mentales à la suite de la troncature au tiers de chaque arête, soit des carrés et des hexagones, mais il a eu une difficulté dans le processus d'encodage de ces informations clés tel que la dimension des formes des hexagones et le nombre de carrés issus des coupes selon les 6 plans. Nous dégagons que cet élève s'est fié à ses images mentales pour produire le développement plan.

Difficulté : confusion dans les types de représentations

La copie #20 (figure 4.39) est une production écrite où l'élève a confondu une représentation en développement plan avec une représentation en perspective cavalière bien qu'elle contienne des éléments erronés (non-conservation des rapports des longueurs).

De plus, les éléments de réponse indiqués à la *question a* : « *Il y a 12 faces au nouveau polyèdre d'Amélie. Ils sont de formes trapézoïdales* » et à la *question b* : « *Il contient 6 sommets et 10 arêtes* » ne concordent pas avec la représentation 2D dessinée à la *question c*. Ainsi, nous pouvons mettre en évidence que cet élève a éprouvé une difficulté à créer des images mentales dynamiques et à les structurer en 3D.

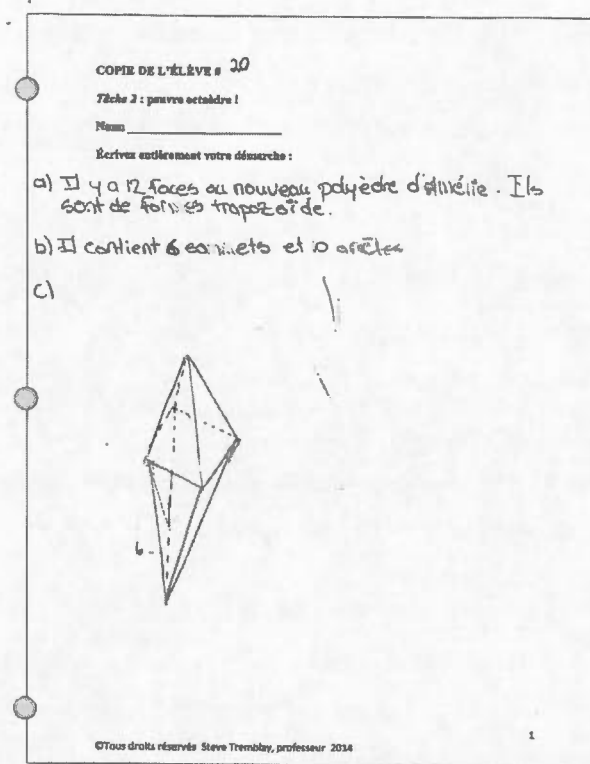


Figure 4.39 Confusion dans le type de représentation (copie #20, p.1)

Dans tout ce qui a été dit jusqu'à maintenant, nous pouvons déduire qu'il y a un lien étroit entre le processus de visualisation par des images mentales et la manifestation du conflit cognitif « vu/su ». L'hypothèse que nous avons exprimée dans notre cadre théorique se confirme, à savoir que la visualisation dans l'espace constitue une capacité à développer pour l'élève dans une tâche de résolution de problème où il a à développer une autre capacité, celle de dessiner des représentations planes des objets 3D. En conséquence, l'habileté de visualisation spatiale se réalise de manière concomitante avec la capacité de produire une représentation 2D d'un objet de l'espace, parce que l'élève a besoin de bien visualiser des informations clés par des images mentales dynamiques, de les combiner, de les analyser et de les structurer dans l'espace afin de les encoder correctement et les dessiner selon les techniques de représentation. Qui plus est, nous dégagons qu'il y a interdépendance entre le processus de visualisation spatiale — où se produit ce que nous nommons des « allers-retours » de visualisation mentale fréquents avec le processus

d'encodage des informations clés (qui sont issues des images mentales) — et certaines connaissances spatiales (relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité) de l'objet 3D, puisque l'élève est contraint de « raisonner » dans l'espace, c'est-à-dire de mobiliser ses connaissances spatiales avant de dessiner l'objet 3D et de n'attribuer au dessin que les propriétés dont on sait qu'elles sont celles de la figure représentée.

Dans la prochaine section, nous allons procéder à l'analyse de la *question d* qui a trait à la production d'une représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué ainsi qu'une représentation en perspective à 1 point de fuite.

Question d : Représente avec la règle usuelle de 30 cm, ce nouveau solide sur une feuille de papier, en perspective cavalière et en perspectives à 1 point de fuite

Nous avons déjà donné une solution possible (voir analyse *a priori* figures 3.14 et 3.15) dans laquelle nous avons nommé les sommets de l'octaèdre tronqué. Nous avons également représenté — en pointillé — les 6 « petites » pyramides droites à base carrée qui sont détachées du solide à la suite des 6 coupes passant par les points ABCD, EFGH, IJKL, MNOP, QRST et UVWX.

Comme nous l'avions anticipé, cette question s'est révélée difficile pour plus de la majorité des élèves. Seulement deux élèves (productions écrites #15 et 25) ont dessiné une représentation en perspective cavalière adéquate. Le taux de réussite est donc de 7,1 %. Voici ces productions écrites :

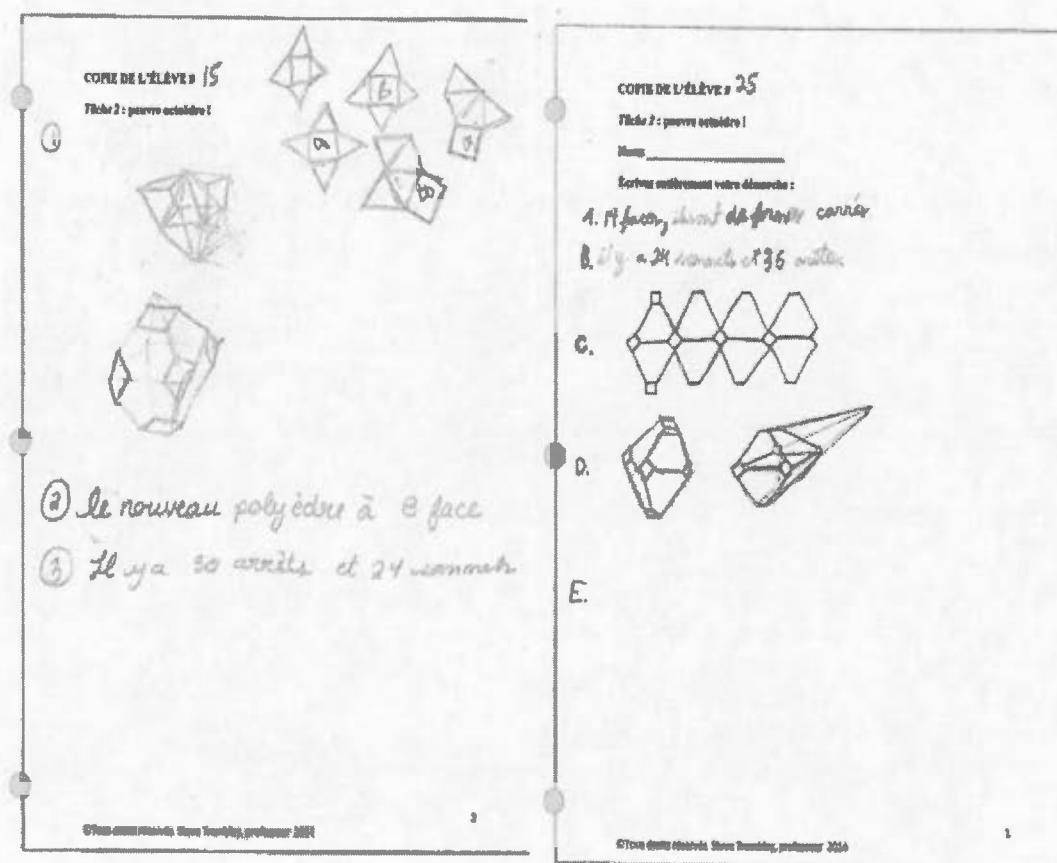


Figure 4.40 Représentations en perspective cavalière acceptables (copies # 15 et 25)

Nous allons expliquer pourquoi ces copies possèdent des éléments adéquats. D'abord, les règles d'une représentation en perspective cavalière ont été respectées, soit :

- une arête de l'objet se trouve dans le même plan frontal que la feuille de papier (arête NI) ;
- les arêtes perpendiculaires au plan frontal — les « fuyantes » — sont toutes du même côté de cette arête et sont parallèles entre elles. Dans la copie #15, les fuyantes ne sont pas tracées clairement en pointillé, mais en traits pleins plus « pâles » que les autres. Toutefois, pour la copie #25, les fuyantes cachées dans la représentation ne sont pas dessinées. L'angle de profondeur d'environ 45° est appliqué dans les 2 copies d'élèves.

- La mesure des fuyantes est réduite d'environ la moitié par rapport à l'arête située au premier plan. Cette convention est respectée dans les deux productions écrites.

Analyse des productions écrites d'élèves ayant des éléments partiellement acceptables de la perspective cavalière (copies # 1, 2, 4 et 28)

Parmi les 28 productions analysées, 4 copies (#1, 2, 4 et 28) ont des éléments partiellement acceptables d'une représentation en perspective cavalière. Toutefois, ces éléments ne sont pas suffisants pour affirmer que la *question d* a été réussie dans ces copies.

Voici un exemple de ces productions écrites (copie #28):

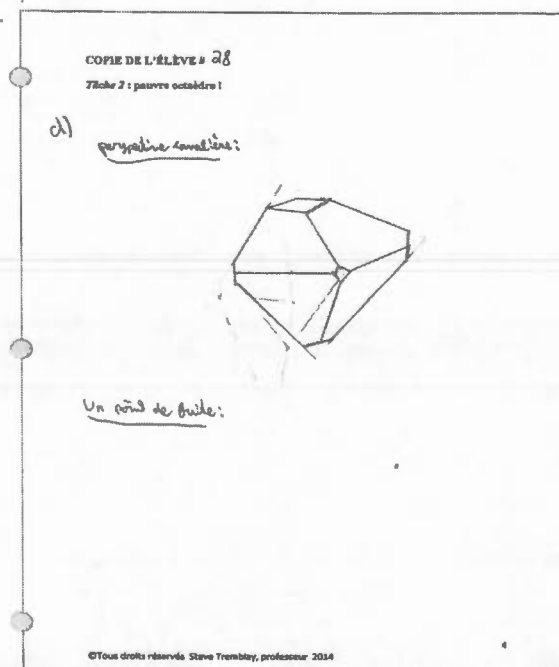


Figure 4.41 Éléments partiellement acceptables d'une représentation en perspective cavalière d'un octaèdre tronqué (copie #28)

Nous constatons que les représentations en perspective cavalière des copies # 1 et 2 ont été réalisées à main levée – ne respectant pas une directive de la *question d* qui était d'utiliser une règle de 30 cm – ce qui n'aide pas à rendre la représentation planaire conforme aux conventions de cette technique.

Pour exposer les éléments acceptables de leur représentation 2D, nous allons utiliser la figure 4.38 (voir *infra*) dans laquelle les sommets sont identifiés. Pour la copie #1, les éléments acceptables sont les suivants :

- l'arête NI est dans le plan frontal de la feuille de papier
- certaines fuyantes sont tracées en pointillés
- l'angle de profondeur des fuyantes est d'environ 45°

Pour la copie #2, les éléments acceptables sont :

- une arête AB est dessinée dans le plan frontal de la feuille de papier
- certaines fuyantes sont tracées en pointillés
- les mesures des fuyantes au plan frontal sont réduites d'environ la moitié
- les faces carrées et hexagonales dessinées sont régulières et tracées en vraie grandeur.

Pour la copie #4, nous avons repéré les éléments acceptables suivants :

- l'arête NI est dessinée dans le plan frontal de la feuille de papier
- les mesures des fuyantes au plan frontal sont réduites d'environ la moitié
- l'angle de profondeur des fuyantes est d'environ 45°

Finalement, voici les éléments acceptables dans la représentation en perspective cavalière de la copie #28 :

- l'arête NI est dessinée dans le même plan frontal que la feuille de papier
- les fuyantes sont tracées perpendiculairement au plan frontal

Analyse des productions écrites erronées

Dix-neuf productions écrites sur vingt-huit ont présenté une difficulté de visualisation interne (voir tableau 4.3) des faces de l'octaèdre tronqué se manifestant dans le processus d'encodage. Nous allons analyser les copies erronées en utilisant la grille de la visualisation interne (voir *infra* figure 4.2).

D'abord, les élèves ont éprouvé une difficulté à identifier les constituants de l'octaèdre tronqué (faces, arêtes et sommets). En effet, nous sommes amenés à penser qu'une représentation en perspective cavalière ne contenant pas les 6 carrées et les 8 hexagones montre que l'élève a éprouvé des difficultés à les imaginer ainsi qu'à les structurer dans l'espace. En conséquence, cette visualisation déficiente a pu provoquer une difficulté supplémentaire dans le processus d'encodage de ces faces, arêtes et sommets en vue de produire la représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué. Ce qui montre qu'il y a interdépendance entre la compétence de visualisation spatiale et l'encodage d'informations clés (constituants de l'objet 3D) pour le dessin en perspective cavalière.

Voici des exemples de productions écrites où se sont exprimées ces difficultés :

- dans les copies #3 et 6 (voir *infra* figure 4.32, p. 206), 10 et 14, il y a une seule face carrée de dessinée ;
- la copie #6 présente un dessin en perspective cavalière contenant 4 hexagones, 4 rectangles et 2 carrées, ce qui ne correspond pas au développement plan réalisé par l'élève (figure 4.32) d'où une difficulté à le visualiser spatialement ;
- dans les copies #8, 24 (figure 4.36), 26, 27, aucune face carrée n'est représentée ;
- dans la copie #16, quatre faces carrées sont représentées, mais la représentation en perspective cavalière est incomplète ;
- dans les copies #1, 2, 7, 8, 9, 10, 16, 18, 20, 26 et 28, la conservation du rapport des longueurs n'est pas respectée.

Analyse des productions écrites contenant une représentation en perspective à 1 point de fuite

Seulement deux élèves ont complété une représentation en perspective à 1 point de fuite (copies # 18 et 25). Les autres productions écrites ne contiennent aucune trace de démarche (dessin) exposant une représentation en perspective à 1 point de fuite. En fait, ce que nous avons exprimé dans notre analyse *a priori* s'est confirmé, à savoir que le niveau de difficulté pour compléter la représentation 2D fut trop élevé pour ces élèves, à cause de la maîtrise exigée. De plus, dans l'enseignement de la géométrie spatiale au secondaire, les exercices proposés aux élèves pour produire des représentations en perspective à 1 point de fuite se limitent à des cas simples (prisme droit à base rectangulaire, cube, pyramide droite à base carrée, cylindre droit, cône droit, etc.) où la 1^{re} étape de cette technique consiste à dessiner une face de l'objet 3D parallèle au plan frontal de la feuille de papier. Or, dans le cas de la représentation en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué, il n'y a aucune face de ce solide qui est parallèle au plan frontal. Ce qui a constitué un élément crucial qui a complexifié le processus d'élaboration d'une représentation en perspective à 1 point de fuite.

Nous sommes conscients qu'analyser des résultats sur deux productions écrites parmi les vingt-huit peut constituer une limite méthodologique. Néanmoins, ce résultat de recherche peut s'avérer révélateur quant à nos questions de recherche. En effet, tel qu'explicité dans notre méthodologie (voir section 3.4 analyse *a priori* des tâches), la visualisation spatiale (externe et interne) entre en jeu, lorsqu'elle fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D. Dans notre chapitre *Discussion des résultats*, nous reviendrons sur les limites de notre étude. Nous allons analyser les productions écrites #18 et 25 (voir figure 4.42).

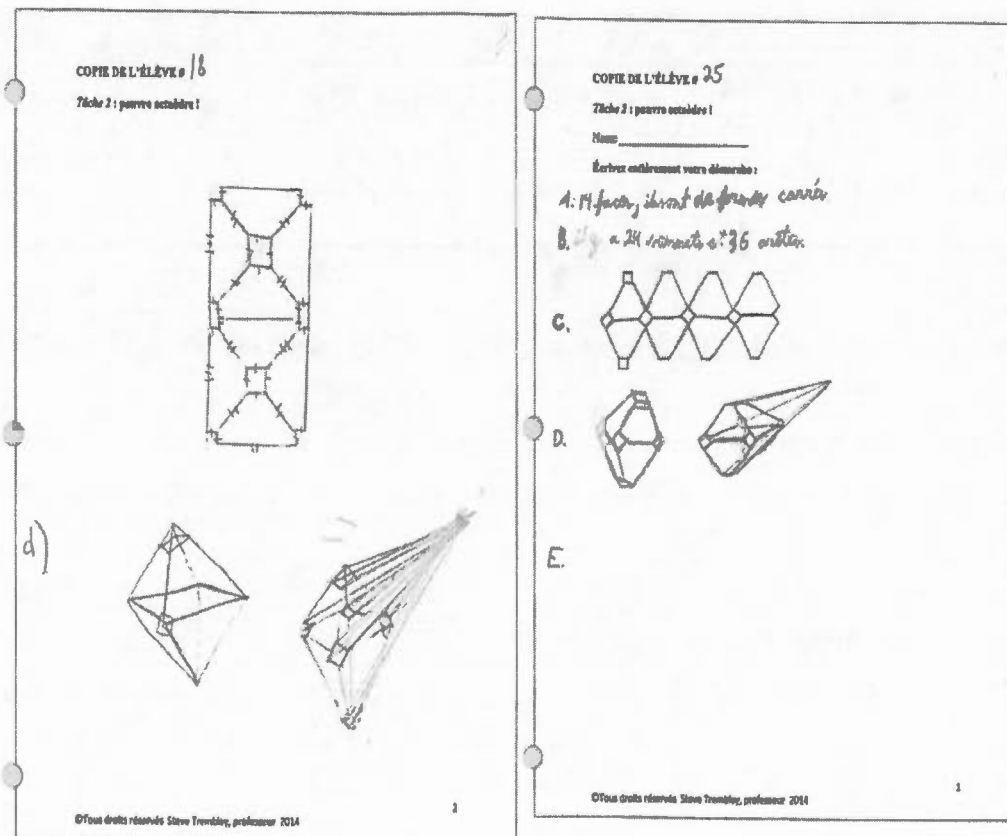


Figure 4.42 Représentation en perspective à 1 point de fuite (copies #18 et 25)

Nous considérons que la copie #18 contient quelques éléments acceptables d'une représentation en perspective à 1 pont de fuite: l'angle de profondeur des fuyantes est d'environ 30° , les fuyantes convergent vers le point de fuite. Par contre, nous constatons qu'il y a présence d'éléments manquants tels que :

- la troncature n'est pas effectuée au tiers de chaque arête
- les fuyantes cachées dans la représentation 2D ne sont pas tracées en trait pointillé

La représentation en perspective à 1 point de fuite de la copie #25 est plus complète que celle de la copie #18. Voici des éléments que nous considérons acceptables :

- les fuyantes convergent vers le point de fuite,

- l’angle de profondeur des fuyantes est d’environ 30° .

Toutefois, il y a présence d’éléments manquants tels que :

- la troncature n’est pas effectuée au tiers de chaque arête
- il manque des faces carrées (EFGH, IJKL et UVWX)
- les fuyantes cachées dans la représentation 2D ne sont pas tracées en pointillé

Qui plus est, puisque les élèves ne sont pas habitués à travailler sur des dessins en perspective à 1 point de fuite d’une telle complexité, à cause de la nature sophistiquée des images mentales, nous dégageons que le développement de cette compétence exige un entraînement particulier chez l’élève, afin qu’il la développe dans des tâches de résolution de problèmes où il a besoin de produire des représentations d’objets 3D (perspective cavalière, perspective à 1 point de fuite).

Question e : Calcule le volume résultant formé par le nouveau solide, sachant que la mesure du côté d’un des triangles équilatéraux dans le polyèdre de départ est de 6 cm.

Cette question s’est avérée difficile pour la majorité des élèves. En effet, seulement deux élèves sur vingt-huit ont donné une solution acceptable au calcul du volume de l’octaèdre tronqué.

D’après nos résultats (voir tableau 4.3), une visualisation spatiale déficiente a conduit les élèves à produire une représentation 2D de l’octaèdre tronqué qui est erronée, ce qui a entraîné des erreurs dans l’application de la formule d’une pyramide droite régulière à base carrée. Voici un exemple de production contenant une démarche adéquate (figure 4.43):

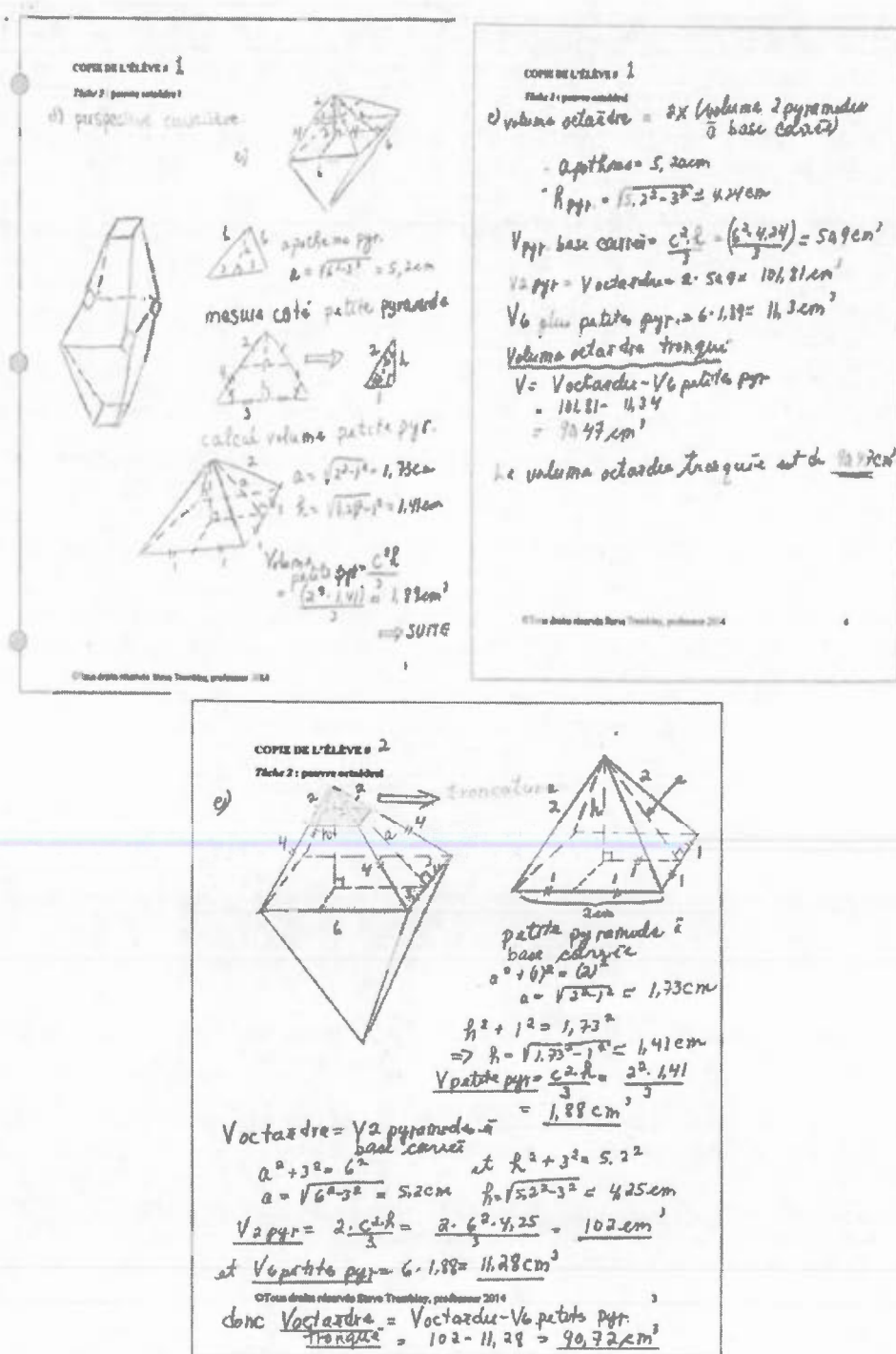


Figure 4.43 Productions écrites de la question e – tâche 2 (copies #1 et 2)

Nous allons maintenant analyser la *question e* des productions d'élèves en nous servant de notre grille d'analyse 4.3.

Analyse des productions écrites erronées

Les productions écrites contenant des traces de raisonnement sont les copies # 7, 9, 10, 12, 14, 18 et 26.

Difficulté à visualiser spatialement les coupes dans l'octaèdre

Nous dégageons pour ces élèves que la difficulté à procéder au calcul de volume de l'octaèdre tronqué est spécifiquement liée à la possibilité de visualiser spatialement les formes des faces (hexagones et carrés) lors des coupes dans l'octaèdre.

Voici un exemple de production écrite (copie#9) :

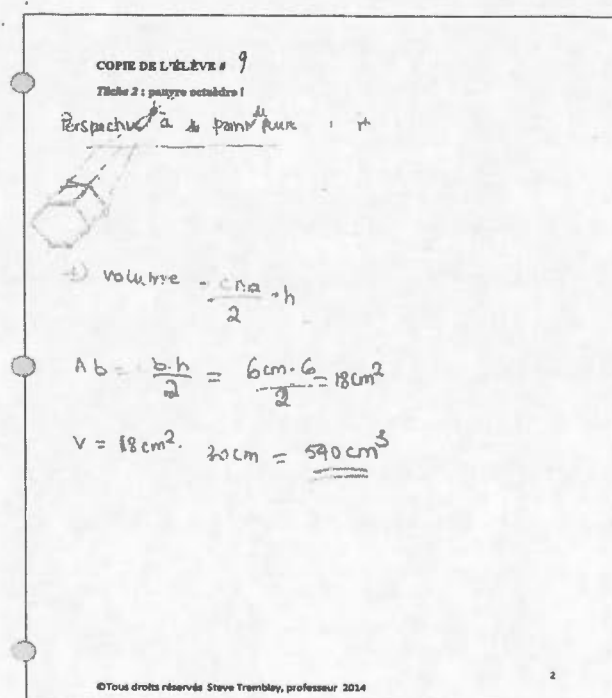


Figure 4.44 Réponses obtenues à la *question e* – tâche 2 (copie #9)

Voici une retranscription des écrits de la démarche de l'élève :

$$\begin{aligned} \text{volume} &= \frac{cna}{2} \cdot h \\ Ab &= \frac{b \cdot h}{2} = \frac{6 \text{ cm} \times 6}{2} = 18 \text{ cm}^2 \\ V &= 18 \text{ cm}^2 \cdot 30 \text{ cm} = 540 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

D'abord, cet élève a utilisé la formule de volume d'un prisme droit à base hexagonale soit, $\text{volume} = \frac{cna}{2} \times h$, puis une autre formule soit $\text{aire base} = \frac{bh}{2}$ où, il n'a pas identifié les éléments de ces formules (c – côté de l'hexagone, n – nombre de côtés de l'hexagone, a – apothème de l'hexagone, h – hauteur du prisme). En fait, l'élève a étayé son raisonnement à partir de la représentation spatiale qu'il a dessinée : un prisme droit à base hexagonale. Donc, il s'est fié à sa compétence de visualisation spatiale de l'objet 3D. Or, cette représentation 2D a pour source d'erreur, une difficulté à visualiser (externe/interne) les faces, arêtes et sommets de l'octaèdre tronqué. En effet, aux questions a-b de la tâche, l'élève a indiqué : « *Le nouveau polyèdre a 8 faces. Ils [sic] ont une forme hexagonale* » (question a) et « *6 sommets* » (question b).

Il y aussi une mauvaise identification de la hauteur (apothème) de la base hexagonale de son prisme (6 cm). Ensuite, il a procédé au calcul du volume du prisme. En fait, nous avons là un élément crucial pour notre recherche, à savoir que la capacité de visualiser dans l'espace les formes, les faces, les arêtes et les sommets d'un objet 3D ainsi qu'à imaginer leur structuration tridimensionnelle, en l'absence de l'objet physique ou d'une de ses représentations 2D, est déterminante dans le traitement du volume, puisque cette visualisation permet de produire une représentation 2D adéquate à laquelle on peut se référer pour repérer et identifier les éléments apparaissant dans la formule de volume dont on a besoin pour le calculer.

Repérer les éléments de la formule dans la représentation spatiale

Analyse de la copie # 12

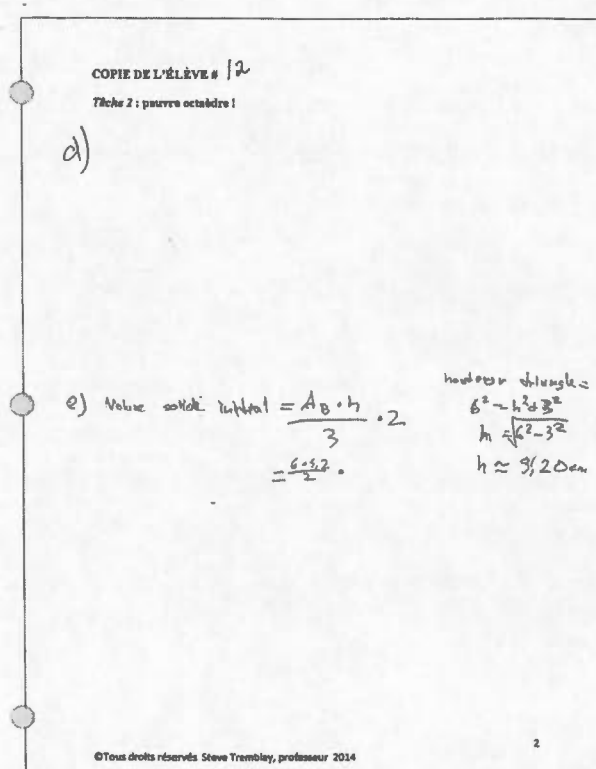


Figure 4.45 Réponse obtenue à la question e (copie #12)

Dans cette production écrite, voici une retranscription de la démarche de l'élève :

$$\begin{aligned} \text{volume solide initial} &= \frac{Ab \cdot h}{3} \cdot 2 \\ &= \frac{6 \cdot 5,2}{2} \end{aligned}$$

hauteur triangle =

$$6^2 = h^2 + 3^2$$

$$h = \sqrt{6^2 - 3^2}$$

$$h \approx 5,20 \text{ cm}$$

Cet élève a utilisé la formule du volume d'une pyramide, mais il n'a pas identifié les éléments de la formule de volume soit : Ab , aire de la base de la pyramide et h , la hauteur de cette pyramide pour cette base.

De plus, il a calculé la hauteur d'un des triangles équilatéraux de l'octaèdre en utilisant la relation de Pythagore, en posant $h = \sqrt{6^2 - 3^2} \approx 9,2$ cm. En fait ce qu'il a repéré, puis calculé, c'est la mesure de l'apothème d'une des 2 pyramides droites à base carrée. Il semble donc que l'élève ait confondu hauteur et apothème (l'apothème étant incidemment une hauteur, celle de la face triangulaire et non celle de la pyramide).

Qui plus est, nous remarquons qu'il n'a pas produit de représentation en perspective cavalière ni en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué (*question d*). Nous avons déjà analysé les réponses se rapportant à la visualisation spatiale à la *question a*: « 18 faces – carrés et hexagones » et à la *question b*: « sommet : 24 ; arêtes 36 », où nous avons mis en évidence que cet élève possède une bonne capacité de visualisation spatiale, mais il a eu une difficulté à analyser, à combiner les images mentales produites (faces, sommets et arêtes) au moment de l'encodage pour produire une représentation planaire du développement plan de l'octaèdre tronqué (*question c*).

Analyse de la copie #14

Voici la production écrite (copie #14):

COPIE DE L'ÉLÈVE # 14

Tâche 2 : pavé octaédre !

Nom : _____

Écrivez entièrement votre démarche :

a) $(4+4)+6=14$
 $6=\text{carré}$ $8=\text{trapèze}$

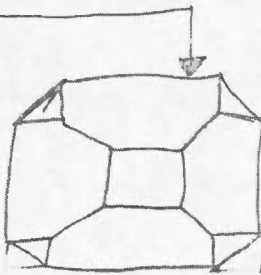
b) $6 \times 4 = 24$

c) $(6 \times 4) + 8 + 4 = 24 + 12 = 36$

d) *classia*

e) $(4 \times 4) \times (\sqrt{6^2 - 3^2}) \times 2$

$V_{\text{sol}} = (16 \times 5.1961) \times 2$
 $= (83.1384 \dots \div 3) \times 2$
 $= 27.7128 \dots \times 2$
 $V_{\text{solide}} \approx 55.4256$



©Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

Figure 4.46 Réponse obtenue à la question e (copie #14)

D'abord, voici une retranscription de la démarche de cet élève :

$$\left((4 \times 4) \times (\sqrt{6^2 - 3^2}) \right) \times 2$$

$$V_{\text{sol}} = (16 \times 5.1961) \times 2$$

$$= (83.1384 \dots \div 3) \times 2$$

$$= 27.7128 \dots \times 2$$

$$V_{\text{solide}} \approx 55.4256$$

D'abord, cet élève a bien calculé la mesure de l'apothème d'une des deux pyramides à base carrée (soit $a \approx 5,1961$ cm), mais il n'a pas écrit la formule de volume d'une pyramide et il n'a

pas annoncé ses calculs. Donc, il a fallu que nous « devinions » son processus de raisonnement. Dans le calcul qu'il a écrit :

$$\left((4 \times 4) \times \left(\sqrt{6^2 - 3^2} \right) \right) \times 2$$

nous déduisons qu'il a identifié dans sa représentation plane de l'octaèdre tronqué, 4 « petites » pyramides à base carrée, à cause de la présence du « $\times 4$ » dans son calcul de volume. Néanmoins, nous ne pouvons analyser plus finement cette production écrite, puisqu'il manque des informations dans le calcul de volume. De plus, l'élève a mal identifié la mesure du côté de la base carrée de chaque « petite » pyramide (4 cm au lieu de 2 cm).

En conclusion, en ce qui a trait au calcul du volume de l'octaèdre tronqué de la tâche 2, cela nous confirme que connaître la formule de volume de la pyramide droite à base carrée n'est pas suffisant pour assurer un traitement adéquat du volume, et que savoir repérer ainsi que calculer les éléments de cette formule se révèle crucial pour l'élève.

Nous allons maintenant passer à l'analyse de la tâche 3 – *la tour décomposable*

4.3.3 Analyse de la tâche 3 : la tour décomposable

Le tableau 4.4 présente les résultats de la tâche 3. Nous procéderons à l'analyse de ces résultats à l'aide de grilles que nous avons élaborées (voir section 4.2). Nous spécifions qu'au moment de la passation de la tâche 3, 2 élèves étaient absents, nous avons donc analysé 31 productions écrites.

Tableau 4.4 Types de difficultés décrits par la recherche et relatives à la tâche 3

Tâche 3	Taux de réussite	Type de difficulté par question	Nombre d'occurrences de la difficulté	Numéro production écrite(sur productions)	Absence de démarche écrite (% d'occurrence)
Question a	$\frac{12}{31} = 41,9\%$	Reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule de volume ou inversement, à associer la bonne formule à un solide donné	$\frac{3}{31} = 9,7\%$	#16, 19, 25	$\frac{1}{31} = 3,2\%$ #4
		Réponses insuffisamment articulées	$\frac{3}{31} = 9,7\%$	#18, 22 et 29	
		Erreurs mineures (exponentiation, confusion aire latérale-aire de la base, etc.)	$\frac{3}{31} = 9,7\%$	#9, 11 et 20	
		Erreur due au contrat didactique	$\frac{9}{31} = 29,0\%$	#15, 17, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31	
Question b	$\frac{1}{31} = 3,2\%$	Représentation en perspective cavalière adéquate contenant une erreur d'une mesure manquante	$\frac{4}{31} = 12,9\%$	#11, 17, 20 et 24	$\frac{6}{31} = 19,4\%$ #3, 9, 16, 22, 23, 26
		Dessin en perspective cavalière à main levée (non-conservation du rapport des longueurs)	$\frac{15}{31} = 48,4\%$	#1, 2, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 19, 27, 28, 31, 29	
		Confusion dans les types des représentations des objets de l'espace (vue de dessus, vue de face)	$\frac{3}{31} = 9,7\%$	#7, 13 et 15	
		Erreur due au contrat didactique	$\frac{5}{31} = 16,1\%$	#17, 24, 27, 28, 30	

D'abord, nous allons synthétiser des éléments de réponses que nous avons obtenus à nos questions de recherche :

Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volumes de solides usuels ?

Nous avons exposé dans notre cadre théorique, entre autres, que la capacité à se représenter les objets 3D fait partie des connaissances spatiales. Ainsi, les techniques de représentation des objets 3D, entre autres, les dessins des vues de face, de droite, de gauche, de dessus, de dessous et d'arrière doivent être comprises et maîtrisées par l'élève dans une situation-problème comportant des calculs de volume. Notre affirmation est corroborée par les résultats de notre étude concernant la *question a* de la tâche 3. En effet, 25,8 % des élèves ont eu des difficultés à décoder des informations clés présentes dans les vues de dessus des 4 solides fournis à la tâche 3, et la compréhension de ces vues s'est révélée nécessaire pour repérer et identifier dans l'espace les éléments des formules de volume du prisme droit à base rectangulaire, du cube, de la pyramide droite à base carrée et du cylindre droit.

Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?

Le rôle de la visualisation externe semble déterminant dans l'identification et le repérage d'informations clés à décoder (hauteur des 4 solides) dans la représentation planaire, soit la vue de dessus d'un objet 3D. Mis à part les élèves qui se sont basés sur une mauvaise interprétation du contrat didactique lors du décodage des vues de dessus des 4 solides, d'autres élèves n'ont pas su décoder cette information clé. Autrement dit, ils se sont basés sur leur perception spatiale, pour percevoir d'un seul coup d'œil que cette hauteur est la même d'un solide à l'autre. Nous dégageons que cela a entraîné d'autres difficultés chez ces élèves, lors du processus d'encodage d'informations clés (hauteur, par exemple) pour produire la représentation en perspective cavalière de la tour décomposable.

Question a : Calcule les dimensions de chaque pièce et leur volume respectif

Dans notre étude, une production écrite sera qualifiée comme adéquate si elle contient tous les éléments de solution dont nous avons discuté dans notre analyse *a priori* (voir *Méthodologie* section 3.4). Le taux de réussite à la question a est de 41,9 %. Voici deux productions d'élèves ayant eu des réponses adéquates:

Handwritten Solution 1 (Copy #13):

Données complètes
 aire de la base (b) : $A = 15 \cdot 21,6$
 $A = 324 \text{ dm}^2$
 aire de la base (c) : $324 = 18 \cdot 18$
 aire de la base (d) : $A = \pi \cdot r^2$
 $324 = \pi \cdot r^2$
 $r = 10,16$

prisme :
 $V = A_b \cdot h$
 $5832 = 324 \cdot h$
 $h = 18$

cylindre :
 $V = A_b \cdot h$
 $5832 = 324 \cdot h$
 $h = 18$

pyramide :
 $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$
 $5832 = \frac{1}{3} 324 \cdot h$
 $h = 54 \text{ dm}$

Handwritten Solution 2 (Copy #21):

prisme rectangulaire
 Dimensions :
 $15 \text{ dm} \times 21,6 \text{ dm} \times 18 \text{ dm}$
 Volume :
 $15 \cdot 21,6 \cdot 18 = 5832 \text{ dm}^3$

cylindre
 Dimensions :
 $r = 10,16 \text{ dm}$
 $h = 18 \text{ dm}$
 Volume :
 $324 \cdot 18 = 5832 \text{ dm}^3$

pyramide
 Dimensions :
 hauteur = $\frac{5832 \cdot 3}{324} = 54 \text{ dm}$
 Volume :
 $\frac{324 \cdot 54}{3} = 5832 \text{ dm}^3$

Figure 4.47 Réponses adéquates à la question a – tâche 3 (copies #13 et 21)

Réponses contenant des erreurs mineures (copies # 9, 11 et 20)

Certaines copies, comme la copie #11 reproduite ci-dessous, font apparaître des erreurs mineures qu'on ne sait pas trop à quoi attribuer, à une simple étourderie ou à une confusion entre deux formules. Dans la copie #11, la seule erreur est celle d'un facteur « 2 » en trop, qui fait écrire à l'élève que l'aire de la base du cylindre est de $2\pi r^2$ plutôt que de πr^2 . Y a-t-il eu confusion (momentanée ou non ?) entre la formule de l'aire du cercle et celle de son périmètre ? Ou encore, dans la formule de l'aire latérale du cylindre, l'élève a-t-il perdu de vue que la portion qui se rapporte au cercle prend en compte l'aire des deux « couvercles » (inférieur et supérieur) du cylindre, et non d'un seul ? Nous ne pouvons savoir...

Nom : _____ Pr 11. Groupe : 52

Situation-Problème (Solides équivalents et figures planes équivalentes)

Tâche 3 : la tour décomposable

Une tour est formée de quatre pièces de bois équivalentes superposées : le bas de la tour est fermé d'un cylindre droit. Il est surmonté d'un cube, puis d'un prisme droit à base rectangulaire et, enfin, d'une pyramide droite à base carrée. Toutes les bases sont équivalentes. Voici un dessin des bases de chaque pièce composant la tour.

a) Calcule les dimensions de chaque pièce et leur volume respectif.

b) Représente, en perspective cavalière, la tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la compose.

Voici deux indices pour résoudre le problème :

- 1) Des figures planes sont dites équivalentes s'ils ont la même aire.
- 2) Des solides sont dits équivalents s'ils ont le même volume.

Handwritten calculations and diagrams:

Prisme droit à base rectangulaire
 $A = b \cdot h = 18 \cdot 21.5 = 387 \text{ dm}^2$
 $V = A \cdot h = 387 \cdot 18 = 6966 \text{ dm}^3$
 $18 = h$

Cube
 $A = C^2 = 18^2 = 324 \text{ dm}^2$
 $V = C^3 = 18^3 = 5832 \text{ dm}^3$
 $18 = C$

Pyramide droite à base carrée
 $V = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{324 \cdot h}{3} = 108h$
 $108h = 5832$
 $h = 54$

Cylindre droit
 $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{324}{2}$
 $\frac{\pi \cdot r^2}{2} = 162$
 $4\pi r^2 = 324$
 $r^2 = 81$
 $r = 9$

Tour

Figure 4.48 Production écrite contenant une erreur mineure (copie # 11)

D'autres productions écrites présentes des erreurs mineures dans les opérations de base, soit une erreur d'exponentiation ou de validation de la solution (copies #9 et 20).

Productions écrites contenant des réponses insuffisamment articulées (copies #18, 22 et 29)

Dans la tâche 3, nous avons catégorisé un type de difficulté où les élèves ont donné des réponses insuffisamment articulées, ou encore dans lesquelles ils ne savaient pas quelle démarche entreprendre pour compléter la tâche.

Nous allons donner l'exemple de la copie #29 :

COPIE DE L'ÉLÈVE # 29

Tâche 3 : la tour décomposable

Nom: _____

Écrivez entièrement votre démarche : Aire base: $15 \times 21,6 = 324 \text{ dm}^2$

a) 1 VOLUME cylindre $V = A_{\text{base}} \cdot h$

$A = 324 \text{ dm}^2 = \pi r^2 \Rightarrow \sqrt{324 \div \pi} = \sqrt{103,7} \text{ dm} = r$

1

©Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

Figure 4.49 Réponses insuffisamment articulées (copie #29)

Voici une retranscription de la copie #29 :

$$\text{Aire base} = 15 \times 21,6 = 324 \text{ dm}^2$$

a) volume cylindre $V = A_{\text{base}} \times h$

$$A = 324 \text{ dm}^2 = \pi \cdot r^2 = \sqrt{324 \div \pi} = \sqrt{0,16} \text{ dm} = r$$

Volume du cube =

$$A_{base} = 324 \text{ dm}^2 \times 6 = 1944 \text{ dm}^2 = \text{Aire totale}$$

L'élève de la copie #29 a calculé la mesure du rayon du cylindre, puis a calculé l'aire totale du cube ($A_{\text{aire totale cube}} = 6 \times 324 = 1944 \text{ dm}^2$) qui n'est d'aucune utilité pour résoudre le problème. La résolution de la *question a* se révèle donc inachevée, puisqu'il manque les démarches pour les calculs des autres valeurs manquantes (hauteurs du prisme à base rectangulaire, du cube, de la pyramide droite à base carrée et du cylindre droit). De plus, il a indiqué un « point d'interrogation » sur sa feuille : ce qui nous indique qu'il ne savait pas comment poursuivre son raisonnement. Nous dégageons que cela est dû à une difficulté à appliquer le concept d'équivalence (les 2 indices accompagnant la tâche 3).

Maintenant, nous allons analyser les productions écrites erronées. Nous nous référons au tableau 4.4 pour les résultats de la tâche 3.

Difficulté à reconnaître à quelle classe de solides s'applique la formule ou inversement, à associer la bonne formule à un solide donné (copies #16, 19, 25)

Nous exposons d'abord la copie #16 où nous avons constaté une confusion de la formule de volume du cylindre avec la formule de l'aire d'un disque :

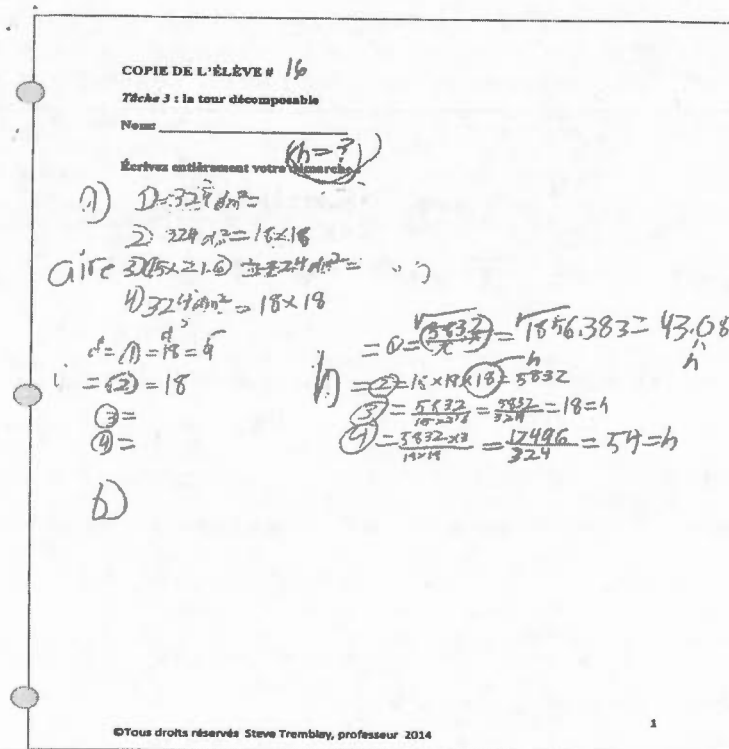


Figure 4.50 Confusion formule de volume d'un cylindre et formule d'aire d'un disque (copie #16, p. 1)

Voici une retranscription des écrits dans la copie #16:

a) 1) 324 dm^2

$$1) = \sqrt{\left(\frac{5832}{\pi}\right)} = 1856.383 = 43.08 = h$$

2) $324 \text{ dm}^2 = 18 \times 18$

2) $18 \times 18 \times (18) = 5832$

Aire 3) $(15 \times 21,6) = 324 \text{ dm}^2$

3) $\frac{5832}{15 \times 21,6} = \frac{5832}{324} = 18 = h$

4) $324 \text{ dm}^2 = 18 \times 18$

4) $\frac{5832 \times 3}{18 \times 18} = \frac{17496}{324} = 54 = h$

$d = 18 = 9$

L'élève a confondu la formule de volume du cylindre avec la formule de l'aire d'un disque. De plus, les traces laissées ne sont pas explicites et nous avons dû « deviner » la démarche algébrique. Par exemple, l'élève a indiqué :

$$\sqrt{\left(\frac{5832}{\pi}\right)} \approx 43,08 = h$$

Nous croyons qu'il a voulu utiliser la formule de volume du cylindre pour déterminer la valeur manquante de la hauteur, mais apparemment, il a oublié d'inclure le paramètre h dans son calcul de volume. Plus spécifiquement, voici exprimée au tableau 4.5 une comparaison entre une bonne manière de procéder et le raisonnement erroné de cet élève :

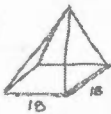
Tableau 4.5 Comparaison entre une démarche appropriée et celle de la copie #16

<i>volume cylindre droit</i> $= \pi r^2 \times h$, où h , est la hauteur du cylindre	Aucune formule de volume n'apparaît. Nous déduisons qu'il a utilisé la formule <i>Aire disque</i> $= \pi r^2$, où r est le rayon
$5832 = \pi \times 10,155^2 \times h$ $\Rightarrow h \approx 18,00 \text{ dm}$	$\frac{5832}{\pi}$ $\sqrt{1856,383} \approx 43,08$

Nous exposons maintenant la copie #19 :

19 p. 3

Volume pyramide

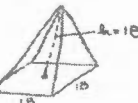





$$V = A_B \cdot h$$

$$\frac{5832}{324} = \frac{324 \cdot h}{324}$$

$$18 = h$$

a) Dimensions de ch. pièce et volume respectif

<u>pyramide</u>	<u>prisme</u>	<u>cube</u>	<u>cylindre</u>
			
$V = 5832 \text{ dm}^3$	$V = 5832 \text{ dm}^3$	$V = 5832 \text{ dm}^3$	$V = 5832 \text{ dm}^3$

© Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

Figure 4.51 Réponses erronées question a – tâche 3 (copie #19)

Une retranscription des écrits dans la copie de l'élève :

Volume pyramide

$$V = A_B \cdot h$$

$$\frac{5832}{324} = \frac{324}{324} \cdot h$$

$$h = 18$$

Dans cette production écrite, l'élève n'a pas utilisé la bonne formule de volume pour déterminer la mesure manquante de la hauteur de la pyramide droite à base carrée. La formule de volume qu'il a indiqué correspond à celle d'un prisme droit :

$$V = Ab \cdot h, \text{ au lieu de : } \text{volume pyramide} = \frac{\text{Aire base} \times h}{3}$$

Nous constatons que cet élève ne reconnaît pas à quelle classe de solide s'applique la formule de volume.

Nous exposons la copie #25 où nous avons observé une confusion dans les classes de solides:

Figure 4.52 Production écrite (copie #25 p. 1-2)

Page 1 (Left): Tâche 3 : tour décomposable. Une tour est formée de quatre pièces de trois équivalences superposées: la base de la tour est formée d'un cylindre droit. Il est surmonté d'un cube, puis d'une pyramide droite. La base rectangulaire est, enfin, d'une pyramide droite. Il faut calculer. Trouver les bases sont équivalentes. Voici un dessin des bases de chaque pièce composant la tour.

Diagram showing four pieces: 1) Circle (base of cylinder), 2) Square (base of cube), 3) Square (base of pyramid), 4) Circle (base of cylinder). Dimensions: Circle 1: 15 dm, 4; Square 2: 15 dm, 4; Square 3: 15 dm, 4; Circle 4: 15 dm, 4.

a) Calcule les dimensions de chaque pièce et leur volume respectif.
b) Représente, en perspective cavalière, la tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la composent.

Voici deux indices pour résoudre le problème:
1) Des figures planes sont dites équivalentes s'il est le même aire.
2) Des solides sont dites équivalents s'il est le même volume.

Page 2 (Right): COPIE DE L'ÉLÈVE #25. Tâche 3 : la tour décomposable. Nom: .

Écris soigneusement votre réponse :

a) 1) cercles := circonférence = $15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$
:= hauteur = 2,6
Volume = $Ab \cdot h = \pi r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 2,6^2 \cdot 2,6 = 46,31 \text{ dm}^3$
:= 2,6 dm

2) Cubes
Base = $15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$
hauteur = 5 dm
Volume = $\frac{c^3}{2} = \frac{15^3}{2} = 1687,5 \text{ dm}^3$

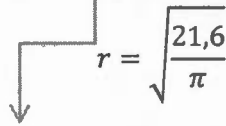
3) Pyramide à base carrée
Base = $15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$
hauteur = 15
Volume = $\frac{c^3 \cdot h}{2} = \frac{15^3 \cdot 2,6}{2} = 2930 \text{ dm}^3$

Une retranscription des écrits de l'élève de la copie #25 :

$$a) 1) \text{cercles} := \text{circonférence} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$$

$$= \text{hauteur} = 21,6$$

$$\text{volume cercle} = Ab \cdot h = \pi r^2 \cdot 21,6 \dots = \pi \cdot 2,62^2 \cdot 21,6 = 465,81 \text{ dm}^2$$



$$r = \sqrt{\frac{21,6}{\pi}}$$

$$r = 2,62 \text{ dm}$$

2) Cube :

$$P_{\text{base}} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$$

$$\text{hauteur} = 15 \text{ dm}$$

$$\text{Volume} = \frac{c^2 \cdot h}{2} = \frac{15^2 \cdot 15}{2} = 1687,5 \text{ dm}^2$$

3) Prisme à base carrée:

$$P_{\text{base}} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$$

$$\text{hauteur} = 21,6 \text{ dm}$$

$$\text{Volume} = \frac{c^2 \cdot h}{2} = \frac{15^2 \cdot 21,6}{2} = 2430 \text{ dm}^2$$

4) Pyramide à base carrée:

$$P_{\text{base}} = 15 \cdot 4 = 60 \text{ dm}$$

$$\text{hauteur} = 15 \text{ dm}$$

$$\text{Volume} =$$

D'abord, nous dégagons que l'élève n'a pas compris l'indice que nous lui avons fourni : le concept d'équivalence des figures planes. Deux figures planes sont équivalentes si elles possèdent la même aire. Or, pour cet élève, ce qui est équivalent semble être le fait d'avoir le même périmètre. En effet nous constatons dans sa production écrite que quelle que soit la base du solide considéré, son périmètre est toujours égal à 60 dm. Il s'agit donc d'une

mauvaise lecture des consignes (ou d'une absence de prise en compte des consignes) et d'une mauvaise interprétation du mot « équivalent ».

De plus, la formule de volume utilisée pour la pyramide droite à base carrée est incorrecte, car il faut diviser par 3 dans cette formule et non par 2, comme l'élève l'a fait. Par ailleurs, il n'a pas indiqué ce que représente c et h dans cette formule :

$$volume = \frac{c^2 \times h}{2}.$$

Une autre difficulté concerne la confusion entre l'aire d'un cercle et le volume d'un cylindre. Par son calcul indiqué, nous constatons qu'il voulait dire plutôt le volume d'un cylindre, mais manifestement, ses connaissances spatiales en géométrie (concepts d'aire et de volume, formules de volume) ne sont pas bien maîtrisées.

En plus, il a indiqué que la hauteur de la vue de dessus du prisme droit à base rectangulaire est de 21,6 dm (le rectangle de dimension 21,6 dm \times 15 dm) et il l'a associée à la hauteur du cylindre (voir partie supérieure gauche de la figure 4.52).

Qui plus est, l'élève n'a pas complété sa représentation en perspective cavalière de la tour avec les quatre solides.

Les difficultés que nous avons identifiées peuvent être liées, soit à la compétence de visualisation externe dans le décodage des vues de dessus des 4 solides composants la tour (décodages erronés des hauteurs du prisme droit à base rectangulaire ($h = 21,6$ dm), du cylindre ($h = 21,6$ dm) et de la pyramide droite à base carrée ($h = 15$ dm)), soit à une mauvaise interprétation du contrat didactique dont nous allons discuter au prochain point.

Erreur due au contrat didactique (copies #15, 17, 23, 24, 26, 27, 28, 30, 31)

Avant d'aborder cette difficulté, nous allons revenir sur ce qu'est le décodage d'une vue de dessus d'un objet 3D. Il s'agit d'utiliser la visualisation spatiale à partir d'une des six vues

possibles d'un objet 3D (vues de face, de droite, de dessus, de gauche, de dessous et d'arrière) pour extraire des informations clés, telles que :

- une projection orthogonale sur un plan,
- dimensions de l'objet 3D : longueur, largeur, hauteur, diamètre, etc.
- le symbole des « petits traits » signifiant « isométrie des segments »,
- nature de la forme de la face (carré, rectangle, autre quadrilatère, etc.)

Puisque le dessin ne présente qu'une face de l'objet 3D, il est nécessaire pour l'élève de se créer des images mentales des autres faces du solide pour faire apparaître mentalement la juxtaposition de ces faces qui donneront l'objet 3D. Or, cette visualisation mentale exige de l'élève qu'il ait compris certaines propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité concernant les faces, les arêtes et les sommets de l'objet 3D (solide).

De plus, le « bon » décodage des vues de dessus des 4 objets de la tour permettra à l'élève de déterminer des mesures manquantes des 3 solides de la tâche pour traiter correctement le volume, en l'occurrence les hauteurs respectives de la pyramide droite à base carrée, du cube, du prisme droit à base rectangulaire, du cylindre droit ainsi que son rayon.

Or, dans cette tâche, ce bon décodage a été « compliqué » par une autre difficulté importante qui est entrée en jeu chez 29,0 % des élèves, soit : une mauvaise interprétation du contrat didactique. Nous rappelons que nous avons fourni aux élèves les représentations « vues de dessus » des 4 solides formant la tour (voir figure 4.53).

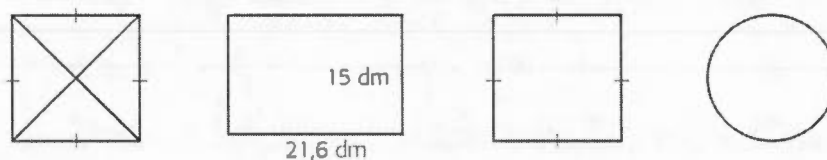


Figure 4.53 Vues de dessus des 4 solides de la tour décomposable

Nous allons d'abord exposer un exemple de production écrite présentant ce type de difficulté, soit la copie #26 :

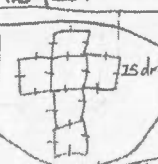
COPIE DE L'ÉLÈVE # 26

Tâche 3 : la tour décomposable

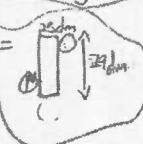
Nom : _____

Écrivez entièrement votre démarche :

volume cube : $25 \times 25 \times 25 = 15625 \text{ dm}^3$ donc volume autres solides = 33750 dm^3

a) cube =  25 dm

hauteur : cylindre opération inverse : $25 \cdot r^2 \cdot h = \text{volume}$
 $\text{volume} \div r^2 \div 25 = h$
 hauteur : $3375 \div 5625 \div 25 = 24 \text{ dm}$

a) cylindre =  25 dm
 24 dm


hauteur pyramide :

© Tous droits réservés Steve Tremblay, professeur 2014

Figure 4.54 Erreur due au contrat didactique (copie #26)

Voici une retranscription des écrits de l'élève de la copie #26 :

volume cube $15 \times 15 \times 15 = 3375 \text{ dm}^3$ *donc volume autres solides*
 $= 3375 \text{ dm}^3$ *car équivalents*



hauteur ... cylindre opération inverse $\pi \cdot r^2 \cdot h = \text{volume}$

$$\text{volume} \div r^2 \div \pi = h$$

$$\text{hauteur} = 3375 \div 56,25 \div \pi \approx 19,32 \text{ dm}$$

↓
19 dm

Dans le calcul du volume du cube, cet élève s'est servi de la mesure d'un des côtés de la base du prisme droit à base rectangulaire, qui est égal à 15 dm, comme étant égale à la hauteur du cube (voir figure 4.54). Il est fort probable qu'en voyant les vues de dessus fournies dans le questionnaire de la tâche, il ait tenu pour acquis que la hauteur de la base du prisme et la hauteur du cube étaient les mêmes.

Plus spécifiquement, le dessin de la vue de dessus du prisme à base rectangulaire dont la hauteur dessinée est 15 dm, est représenté à gauche de la vue du dessus du cube où l'arête « semble » être égale à 15 dm (voir figure 4.54), alors que ce n'est pas le cas. Il s'agirait donc d'un problème de contrat (contrat « didactique », au sens de Brousseau ?), l'élève ayant interprété comme allant de soi que des dimensions si proches dans la représentation fournie dans l'énoncé pouvaient être considérées comme étant les mêmes. Cette mauvaise interprétation du « contrat » sous-jacent à la lecture de la figure l'a conduit à procéder à un calcul de volume erroné comme le présente sa production écrite.

On peut d'ailleurs penser que la présentation des 4 vues du dessus dans une bande de largeur uniforme a pu renforcer cette interprétation des mesures comme étant toutes les mêmes, de 15 dm, d'une figure à l'autre (côté du cube, largeur du rectangle, côté de la base de la pyramide, diamètre du cercle).

Voici une retranscription des écrits de l'élève :

*Les volumes de chaque solide doivent – ils être équivalents?
Je n'avais pas ma calculatrice et je n'ai donc pas pu compléter cette tâche.*

Prisme rectangulaire

$$\begin{aligned} V_{\text{prisme}} &= Ab \cdot h & Ab &= b \cdot h \\ &= 324 \text{ dm}^2 \cdot 15 \text{ dm} & &= 21,6 \text{ dm} \cdot [15 \text{ dm}] \\ &= 4860 \text{ dm}^3 & &= 324 \text{ dm}^2 \end{aligned}$$

cube

$$\begin{aligned} V_{\text{cube}} &= 6c^2 \text{ ou } Ab \cdot h \\ &= 6 \cdot (18 \text{ dm})^2 (324 \text{ dm}^2 / 6) \\ &= 1944 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Trouver côté d'un cube carré (base)

$$\begin{aligned} A &= 6c^2 & A &= 6c^2 \\ \sqrt{324 \text{ dm}^2} &= \sqrt{c^2} \\ 18 \text{ dm} &= c \end{aligned}$$

BOULE (je ne m'étais pas souvenu que c'était en fait un cylindre)
TROUVER AIRE D'UN CERCLE (rayon) VOLUME D'UNE BOULE

$$Ac = \pi \cdot r^2$$

$$324 \text{ dm}^2 / \pi = \pi r^2 / \pi$$

$$\sqrt{103,13} = \sqrt{r^2}$$

$$10,16 \text{ dm} = r$$

$$\begin{aligned} V_o &= \frac{4\pi r^3}{3} \\ &= \frac{4\pi(10,16 \text{ dm})^3}{3} \\ &= \frac{13183,04}{3} \\ &= 4394,35 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

PYRAMIDE

Trouver l'aire d'une pyramide

$$A_{\text{pyr.}} = Ab + Al$$

$$324 \text{ dm}^2 = c^2 + 4(c^2/4)$$

$$\sqrt{324 \text{ dm}^2} = \sqrt{c^2 + c^2}$$

$$18 \text{ dm} = c$$

$$\begin{aligned} \text{VOLUME PYRA.} &= \frac{Ab \cdot h}{3} \\ &= \frac{324 \text{ dm}^2 \cdot 9 \text{ dm}}{3} \\ &= 972 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$



$$= \frac{324 \text{ dm}^2}{4}$$

$$= 81 \text{ dm}^2$$

$$\frac{b \cdot h}{2} = 81 \text{ dm}^2 \quad \times 2$$

$$18 \text{ dm} \cdot h = 162 \text{ dm}^2 / 18 \text{ dm}$$

$$h = 9 \text{ dm}$$

D'abord, l'élève n'a pas compris que le volume de chaque solide est égal à 5832 cm³, c'est-à-dire que les 4 solides sont équivalents. Ainsi, il a calculé les volumes du prisme (4860 dm³), du cube (1944 dm³), de la boule (4394,35 cm³) – qui n'était pas demandé – et de la pyramide (972 dm³).

L'élève a calculé l'aire d'une pyramide, alors que ce n'était pas exigé dans la tâche. De plus, il s'est servi de la formule du volume d'une boule pour calculer le volume du cylindre. Il s'est aperçu de son erreur, mais, à notre avis, plus tard dans son raisonnement, puisqu'il a écrit :

BOULE (je ne m'étais pas souvenu que c'était en fait un cylindre)

Il a trouvé le rayon du cylindre, toutefois.

Pour procéder au calcul erroné du volume de la pyramide droite à base carrée, il a d'abord utilisé le fait que l'aire d'une face latérale triangulaire de cette pyramide est égale à 324 dm², soit la même aire que la base du prisme droit à base rectangulaire :

$$\triangle = \frac{324 \text{ dm}^2}{4}$$

$$= 81 \text{ dm}^2$$

$$\frac{b \cdot h}{2} = 81 \text{ dm}^2 \quad \times 2$$

$$18 \text{ dm} \cdot h = 162 \text{ dm}^2 / 18 \text{ dm}$$

$$h = 9 \text{ dm}$$

Ainsi, l'élève a procédé à un décodage erroné de la vue de dessus de la pyramide droite à base carrée. En fait, il aurait dû comprendre que ce qui est égal à 324 dm², c'est l'aire des

bases des 4 solides. Ensuite, il a calculé que la hauteur d'une face triangulaire est de 9 dm. Finalement, il a utilisé le fait que la hauteur du triangle est la hauteur de la pyramide droite :

$$\begin{aligned} \text{VOLUME PYRA.} &= \frac{Ab \cdot h}{3} \\ &= \frac{324 \text{ dm}^2 \cdot 9 \text{ dm}}{3} \\ &= 972 \text{ dm}^3 \end{aligned}$$

Nous ajoutons que ces difficultés pourraient être liées à la représentation spatiale de la tour décomposable. En effet, aucune représentation en perspective cavalière ne vient accompagner le raisonnement de cet élève, ce qui peut mettre en évidence le rôle qu'aurait pu avoir la visualisation spatiale, notamment si l'élève avait procédé au repérage d'informations clés (hauteurs de la pyramide droite à base carrée, du cube, du prisme droit à base rectangulaire et du cylindre droit) qu'il aurait indiqué dans la représentation 2D des 4 objets de la tour.

Question b : représente, en perspective cavalière, la Tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la composent.

À partir des résultats obtenus à la *question b*, nous pouvons déduire certaines informations telles que :

- 16,1 % des élèves ont produit une représentation en perspective cavalière erronée qui seraient due à une mauvaise interprétation du contrat didactique dont nous avons discuté à la *question a*,
- 19,4 % des élèves ont été incapables de produire une représentation en perspective cavalière de la tour décomposable,
- 12,9 % des élèves ont réussi à produire une représentation en perspective cavalière adéquate de la tour décomposable avec une seule erreur d'une mesure manquante,
- 48,4 % des élèves ont produit un dessin en perspective cavalière à main levée,
- 1 seul élève parmi les 31 a été en mesure de produire une représentation en perspective cavalière adéquate sans erreur dans la détermination des mesures manquantes (hauteurs des 4 solides).

Analyse de la production écrite ayant une représentation en perspective cavalière adéquate.

La représentation en perspective cavalière de la copie #21 est adéquate et correspond aux mesures manquantes trouvées à la *question a* (hauteurs des 4 solides et mesure du rayon du cylindre). Cet élève a eu recours à la visualisation spatiale (externe et interne) en se servant des éléments de connaissances spatiales telles que les vues de dessus des quatre objets 3D. Ainsi, il a décodé les éléments clés des vues de dessus, dans nous avons discutés dans notre analyse *a priori* (voir chapitre 3 section 3.4) pour ensuite se créer des images mentales de la structure 3D de chaque solide, puis, il a finalement eu recours à ses connaissances spatiales pour représenter en perspective cavalière les quatre objets 3D superposés.

Une erreur apparaît toutefois dans le rapport des longueurs entre les hauteurs des quatre solides : la hauteur de la pyramide est de 54 dm et la hauteur des 3 autres solides est de 18 dm. Or, on observe dans la représentation en perspective cavalière que le rapport des longueurs n'a pas été conservé (voir figure 4.56).

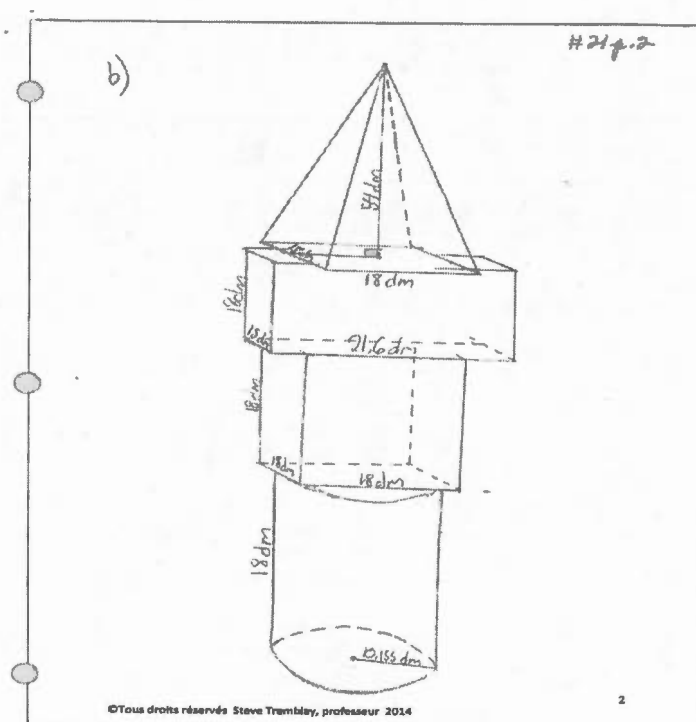


Figure 4.56 Représentation en perspective cavalière (copie #21, p. 2)

Analyse des autres productions écrites

Ce que nous anticipions dans notre analyse *a priori* s'est produit : une des difficultés importantes auxquelles ont été confrontées les élèves s'est révélée être la capacité de produire une représentation en perspective cavalière qui soit conforme aux conventions de cette technique.

1) productions écrites n'ayant aucune trace de représentations en perspective cavalière : copies #3, 4, 9, 16, 22, 23, 26

Ces productions écrites ne pourront être analysées puisque nous n'avons pas de représentations en perspective cavalière sur lesquelles étayer l'analyse.

2) productions écrites contenant une représentation en perspective cavalière adéquate avec une erreur d'une mesure manquante : copies #11, 17, 20 et 24

Nous allons présenter un exemple de production écrite où la représentation en perspective cavalière est adéquate pour deux solides de la tour (copie #11) et un deuxième exemple où la représentation en perspective cavalière est adéquate, mais qui contient une erreur dans la détermination d'une mesure manquante (copie #20).

Voici la copie #11 :

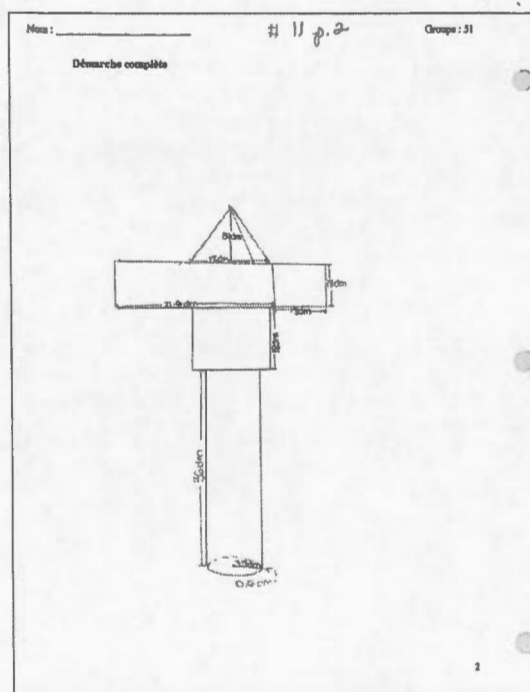


Figure 4.57 Erreur de représentation en perspective cavalière (copie #11, p.2)

Dans la représentation en perspective cavalière de la copie #11 (figure 4.57), nous observons que le cylindre droit ainsi que la pyramide droite à base carrée sont bien représentés, mais que les représentations du cube et du prisme droit sont erronées, à savoir :

- seule une face du cube est représentée, soit celle qui est parallèle au plan de la feuille sur lequel est réalisé le dessin ;
- les faces illustrant la « profondeur » du cube ne sont pas représentées, ni les faces cachées, ni les fuyantes ;
- dans la représentation du prisme droit à base rectangulaire, deux faces sont représentées de façon inadéquate : la base rectangulaire avec les mesures de $21,6\text{ dm} \times 15\text{ dm}$ est dessinée avec des mesures de $21,6\text{ dm} \times 18\text{ dm}$ – ce qui révèle une perception spatiale déficiente due à un repérage mal interprété de la hauteur de la base du prisme avec la hauteur du solide lui-même. La 2^e face du solide représentée dans la production écrite ($15\text{ dm} \times 18\text{ dm}$) n'est pas représentée correctement, c'est-à-dire que l'angle des fuyantes n'est pas d'environ 45° , mais plutôt de 180° entre la base du prisme et cette face.

En conséquence, nous pouvons mettre en évidence que la perception spatiale et les connaissances spatiales telles que définies dans notre cadre théorique (voir chapitre 2, section 2.1.2) ont joué un rôle déterminant chez cet élève.

Les connaissances spatiales qui entrent en jeu ici concernent la capacité de produire des représentations en perspective cavalière respectant les conventions propres à cette technique.

Voici maintenant la copie #20 :

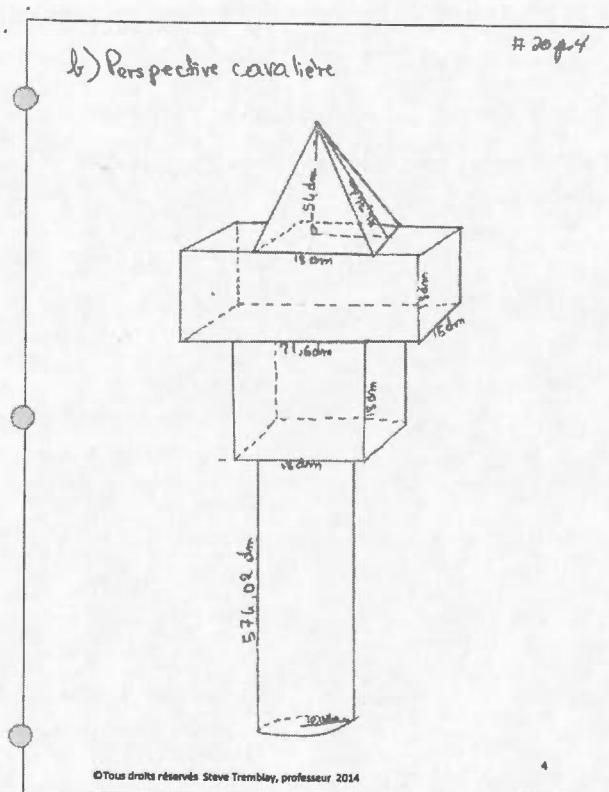


Figure 4.58 Représentation en perspective cavalière de la tour acceptable sauf pour la hauteur du cylindre (copie #20, p. 4)

Pour la copie #20 (voir figure 4.58), la représentation en perspective cavalière est acceptable, mais elle contient une erreur d'une mesure manquante, soit la hauteur du cylindre (574,02 dm au lieu de 18 dm). De plus, le rapport des longueurs n'est pas conservé pour la hauteur de la pyramide (54 dm).

3) productions écrites ayant une représentation en perspective cavalière à main levée avec non-respect des conventions

Ces productions écrites qui représentent 48,4 % des élèves relèvent davantage d'un dessin à main levée que de représentations en perspective cavalière. De plus, le rapport des longueurs

n'est pas conservé en ce qui a trait aux hauteurs. Par exemple dans les copies #1, 2, 6, 8 et 14 (voir figure 4.59), on observe que les hauteurs du prisme et du cube sont « de même longueur » dans le dessin 2D et que la hauteur du cylindre est plus grande que celle de la pyramide. Or, la hauteur de la pyramide (54 dm) est plus grande que la hauteur du cylindre (18 dm).

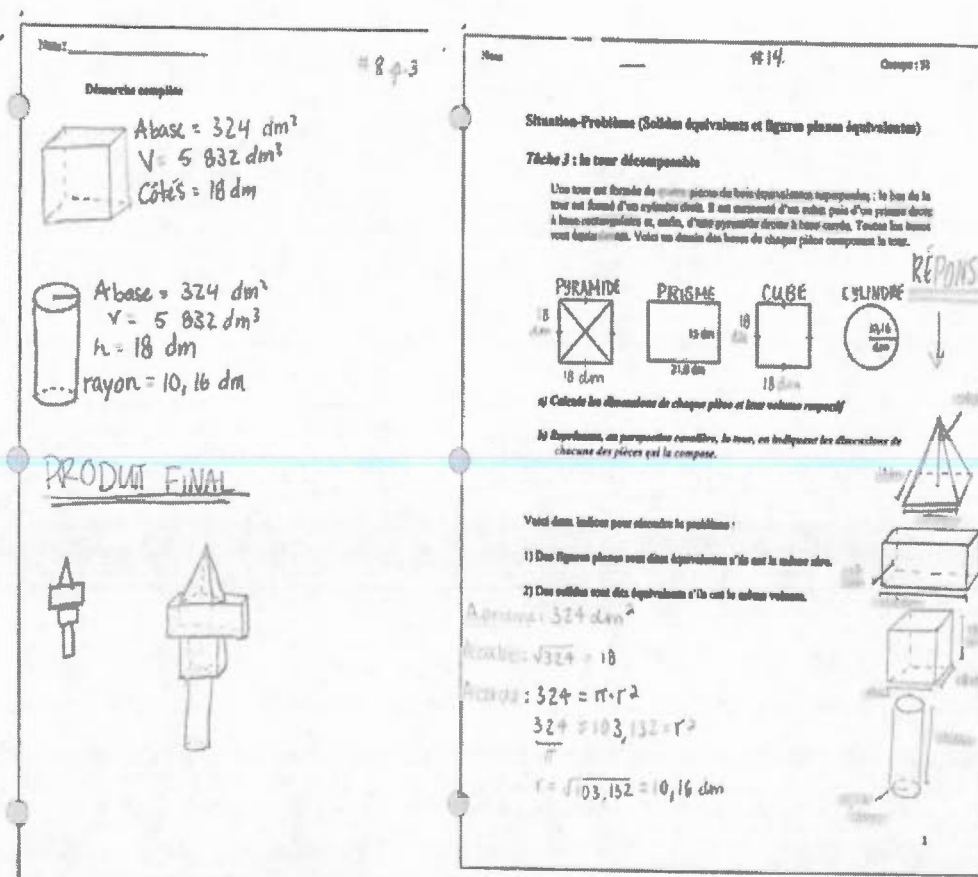


Figure 4.59 Représentations en perspective cavalière (copies #8 et 14)

4) productions écrites où il y a confusion dans les types de représentation

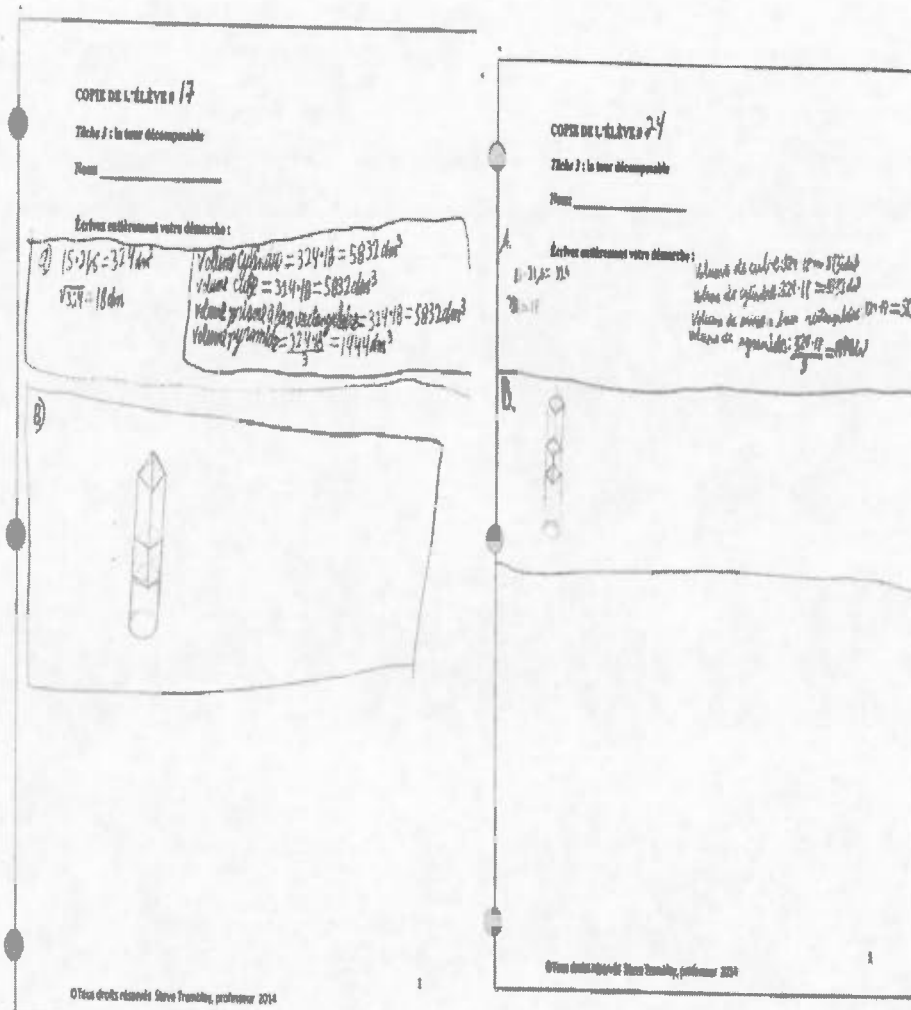
Nous exposons d'abord, les productions écrites des élèves (copies #13 et 15) :

5) productions écrites relevant de l'erreur due à la mauvaise interprétation du contrat didactique

Nous avons discuté à la *question a* de cette tâche que le conflit dû au contrat didactique, en ce qui concerne le décodage des vues de dessus des 4 solides, s'est révélé une difficulté pour 29,0 % des élèves. Cette difficulté a eu des répercussions sur la réussite de la *question b* (représentation en perspective cavalière de la tour).

Ainsi, parmi les 9 élèves sur les 31 (29,0 %) ayant commis l'erreur due au contrat didactique à la *question a*, 5 d'entre eux (soit 16,1 %) ont produit un dessin en perspective cavalière partiellement acceptable (*question b*), soient les élèves des copies # 17, 24, 27, 28 et 30. Nous mettons en évidence que la mauvaise interprétation de la consigne due au contrat didactique, c'est-à-dire considérer que la hauteur (15 dm) de la base du prisme droit à base rectangulaire est la même pour les hauteurs respectives de la base du cube, de la base de la pyramide droite à base carrée ainsi que la mesure du diamètre du cylindre droit, a conduit ces 4 élèves à calculer des mesures manquantes erronées dans le traitement du volume de ces solides. En conséquence, leur dessin en perspective cavalière a été erroné.

Nous présentons comme exemple, les copies #17 et 24 :



Nous dégageons que les productions écrites relevant du conflit dû au contrat didactique se révèlent une limite méthodologique qui a eu une influence sur nos résultats de recherche. Nous aborderons cette limite dans notre chapitre *Discussion des résultats*.

Notre analyse des résultats est maintenant complétée. Dans le prochain chapitre, il sera question d'interprétation des résultats et plus spécifiquement, une phase importante de l'interprétation, qu'on désigne habituellement par le terme discussion, qui consiste à relier les résultats au cadre théorique et à la problématique en montrant comment ceux-ci permettent de faire progresser les connaissances en géométrie de l'espace.

CHAPITRE V

DISCUSSION DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous allons examiner les résultats dans leur ensemble. Cela exige une analyse approfondie des limites conceptuelles et méthodologiques : nous allons donc réexaminer avec soin chacune des opérations qu'a entraînées notre recherche.

À la lumière des résultats de notre étude, nous avons obtenu des éléments de réponses à nos questions de recherche. Nous allons revenir sur les productions suscitées par chacune des trois tâches et sur leur analyse pour discuter des résultats observés. Il est possible que nous soyons amenés à rechercher de nouvelles références dans la littérature scientifique, faute d'avoir trouvé dans la revue qui avait déjà été réalisée toutes les références permettant de soutenir ou d'expliquer nos résultats.

5.1 Validité des résultats

5.1.1 Réponses aux questions de recherche

a) Discussion sur la tâche 1 : du chocolat Toblerone !

Question a : Nomme le nouveau prisme ainsi formé

Nous rappelons que dans la *Problématique*, nous avons relevé dans notre vécu d'enseignant une difficulté chez les élèves à identifier les constituants d'un objet 3D qu'ils visualisent directement ainsi qu'à identifier une mesure manquante. Toutefois, pour la *question a*, les élèves ont très bien réussi puisque le taux de réussite est de 93,9 %. Ceci atteste que la

visualisation externe ainsi que la visualisation interne ont rempli leurs rôles, à savoir aider l'élève à nommer adéquatement le nouveau solide en repérant dans l'espace ses constituants. On peut penser que le fait d'avoir eu accès à des objets physiques tels que des barres Toblerone et des *Polydrons Frameworks* pouvant être manipulés et vus dans différentes positions a fortement aidé l'élève. En confrontant nos résultats avec ceux des études de Pallascio, Papillon et Dion (1985, 1986), nous pouvons affirmer que notre argumentation est valide, à savoir que la visualisation spatiale lorsqu'elle est accompagnée d'une manipulation de l'objet 3D, facilite grandement l'identification des constituants de l'objet 3D.

Question b : Représente-le en perspective à 1 point de fuite, puis en perspective cavalière.

Les résultats obtenus à la *question b* indiquent que 63,6 % des élèves ont été capables de dessiner une représentation en perspective cavalière adéquate du prisme droit à base trapézoïdale et que 60,6 % des élèves ont produit une représentation en perspective à 1 point de fuite appropriée.

En ce qui concerne les productions erronées du dessin en perspective cavalière, nous avons dégagé que la difficulté centrale provient d'une coordination de leurs images mentales issues de la visualisation externe et de la maîtrise des règles de la perspective cavalière, plus spécifiquement celles ayant trait au parallélisme des arêtes horizontales, des arêtes verticales et des fuyantes. En conséquence, la visualisation spatiale agit en interdépendance avec la capacité de produire des représentations 2D en perspective. Or, dans notre problématique nous avons fait l'hypothèse que l'habileté à comprendre et être capable de réaliser des dessins en perspective constitue un atout majeur pour l'élève lorsqu'il aura à calculer le volume d'un solide dans une tâche de résolution de problème. Nos résultats montrent que les élèves ayant produit des représentations en perspective (cavalière et à 1 point de fuite) adéquates ont tous réussi par la suite à calculer le volume du prisme à base trapézoïdale.

Pour ce qui est des dessins en perspective à 1 point de fuite erronés des élèves (qui représente 39,4 %) , les difficultés concernent la maîtrise des conventions de cette technique combinée à une maîtrise déficiente de la relation de parallélisme dans l'espace.

En conséquence, nous dégageons une relation cruciale entre la visualisation d'un objet 3D et sa représentation en perspective cavalière, de même qu'en perspective à 1 point de fuite : une prise de conscience des différences géométriques entre l'objet 3D et sa représentation est indispensable, un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet que s'il a une bonne image mentale de cet objet et aussi une connaissance adéquate des règles de représentation lui permettant de le dessiner convenablement. Notre argumentation corrobore les études de Parzysz (1988, 1989, 1991) ; Colmez et Parzysz (1993) et Bonafé et Sauter (1998) traitant de l'enseignement de la perspective cavalière.

Question c : Dessine un développement plan pour ce nouveau polyèdre. Indique les dimensions du nouveau prisme et identifie les bases du prisme par B1 et B2.

Pour les élèves ayant eu une difficulté à utiliser l'habileté de visualisation interne du prisme droit à base trapézoïdale, nous pouvons dégager qu'elle est liée à la capacité de comprendre les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement, d'orthogonalité et de parallélisme dans l'espace, pour élaborer des représentations en perspective d'un objet 3D. Ce qui est complexe dans le processus d'apprentissage de l'élève, c'est d'une part de bien comprendre ces relations et d'autre part, d'être capable de les visualiser dans l'espace. Nous sommes convaincus que c'est là que réside le problème du décodage/encodage des informations clés.

En l'occurrence, nous obtenons des éléments de réponse pour notre 2^e question de recherche : *quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?*

Nous avons exposé dans notre *analyse a priori* que la représentation des objets 3D par les dessins 2D des développements plans est directement liée à la capacité des élèves à combiner et analyser les images mentales. Dans l'analyse des résultats (chapitre 4), nous avons montré que la visualisation interne dans un 1^{er} temps, puis la visualisation externe, se sont révélées difficiles à mettre en œuvre chez certains élèves ayant répondu à la *question c*.

Ainsi, nous envisageons déjà une 1^{re} recommandation liée à notre étude en ce qui a trait à l'apprentissage de la géométrie spatiale au secondaire, spécifiquement dans la capacité à visualiser des développements plans de solides plus sophistiqués : afin de bien développer une visualisation spatiale efficace, il faudrait instaurer un entraînement spécifique contenant des tâches axées sur des solides dont la structure est plus complexe, autres que ceux qui sont habituellement présentés dans les manuels d'élèves pour les habilitier à développer cette compétence.

Nous suggérons des exemples de tels solides :

- quelques solides de Platon (octaèdre régulier, icosaèdre régulier, dodécaèdre régulier)
- des solides décomposables tels que des bipyramides formées de deux pyramides régulières droites à base pentagonale, hexagonale ou octogonale collées le long d'une base commune.

Une fois la visualisation interne réalisée, les élèves doivent dessiner les représentations 2D (développement plan ou en perspective) de ces solides afin de repérer les éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale pour en calculer le volume.

Question d : Calcule le volume de ce nouveau solide.

Dans notre *Problématique*, nous avons présenté qu'en ce qui concerne le calcul du volume des solides, il s'avère très utile pour l'élève de bien comprendre les techniques de représentation d'objets 3D afin d'une part de recourir à la visualisation pour s'imaginer mentalement où sont situés les constituants du solide et d'autre part, une fois qu'ils sont bien identifiés, de procéder ensuite au calcul de volume auquel s'applique la formule adéquate.

Or, la difficulté la plus fréquente (15,2 %) dans le calcul de volume du prisme a été celle de repérer les éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale. Nous dégageons que les élèves en cause n'ont pas appuyé leur raisonnement sur la représentation spatiale du

solide. Plus précisément, ces élèves ont assimilé la hauteur à la verticalité sur le dessin qu'ils ont produit. Un dessin représenté en perspective cavalière de façon que la hauteur ne soit pas verticale, mais représentée par les fuyantes, pose problème, notamment pour un calcul de volume. Cela montre que la visualisation interne est déterminante pour repérer dans l'espace une information clé telle que la hauteur et aussi de procéder à un décodage adéquat. Nos résultats corroborent donc les recherches menées par Parzysz (1988, 1989, 1991), ainsi que Colmez et Parzysz (1993).

Nous spécifions que le décodage erroné dans la représentation en perspective cavalière (*question b*) provenant de la visualisation serait une cause expliquant cette confusion, à travers laquelle les élèves ont perçu que la hauteur d'un prisme est celle de sa base (ici le trapèze). Ainsi apparaît l'ambiguïté du mot hauteur — et celle du mot base qui lui est associé — dont nous avons déjà discuté dans notre problématique (voir section 2.1).

Ainsi, nous avons des éléments de réponse pour notre 3^e *question de recherche* : *comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume?*

Nous avons montré antérieurement que pour 15,2 % des élèves, la visualisation spatiale a joué un rôle dans le traitement de la formule de volume du prisme droit régulier à base trapézoïdale. En effet, elle s'est manifestée par une difficulté à repérer les éléments dans la formule de volume du solide qu'ils ont représenté en perspective cavalière, en perspective à 1 point de fuite ou en développement plan. En conséquence, la capacité de visualisation spatiale (externe et interne) fut déterminante pour assurer un traitement adéquat de la formule de volume du prisme à base trapézoïdale.

Ainsi, la maîtrise de la compétence de visualisation spatiale combinée à la maîtrise des règles et techniques de représentation des objets de l'espace (développement plan, perspectives cavalière et à 1 point de fuite) — qui relèvent des connaissances spatiales — ont eu un impact dans le processus de calcul de volume du prisme droit à base trapézoïdale.

Question e :

Pour le temps des Fêtes, la compagnie Toblerone a mis sur le marché de grosses boîtes qui contiennent chacune un bon nombre de barres Toblerone. Ces boîtes sont des prismes à base hexagonale. La mesure du côté de la base est de 6 cm, la mesure de l'apothème de la base est de 5,2 cm et la hauteur de la boîte est de 30,5 cm. Est-il possible de remplir ces boîtes sans laisser d'espace vide ? Si oui, avec combien de barres Toblerone par boîte ? Représente en perspective cavalière la boîte de carton en montrant avec le dessin comment y sont placées les barres.

Au chapitre 1, *Problématique*, nous avons exposé une difficulté chez l'élève à visualiser et à se construire une image mentale. Or, il semble que les élèves n'ont pas éprouvé cette difficulté pour la *question e*, puisque le taux de réussite à cette question s'est révélé élevé, soit de 90,9 %.

Un premier aspect de la *question e* exigeait de l'élève qu'il ait recours à la visualisation spatiale en se créant des images mentales des six barres de chocolat Toblerone assemblées de manière qu'elles forment un nouveau prisme sans qu'il y ait d'espace vide. Puis, il devait dessiner une représentation en perspective cavalière afin de montrer comment sont placées les 6 barres. Nos résultats montrent que 18 élèves sur 33, soit 54,5 % ont dessiné une représentation 2D en perspective cavalière du boîtier sans avoir recours à un calcul de volume pour trouver le nombre de barres à placer dans le boîtier, ce qui implique forcément que la visualisation spatiale a été mobilisée et qu'elle fut d'une grande utilité.

Ainsi, nous décrivons le rôle de la perception spatiale pour la *question e* :

- Reconnaître les formes discriminées au 1^{er} coup d'œil soit l'assemblage des 6 barres Toblerone (6 prismes droits à base triangulaire) faisant apparaître une nouvelle forme 3D (solide) : un prisme droit régulier à base hexagonale.

Les rôles de la visualisation spatiale dans l'encodage de l'objet 3D pour produire la représentation 2D en perspective cavalière :

- amorce d'une analyse sur des parties spécifiques du nouveau solide dans l'élaboration d'images de l'assemblage des 6 prismes droits à base triangulaire juxtaposés le long des faces rectangulaires. Analyse d'images mentales sur d'autres parties du prisme droit régulier à base hexagonale : les bases hexagonales du prisme sont parallèles, les faces latérales sont rectangulaires ;
- les solides utilisés (prismes droits à base triangulaire) ont des faces communes lorsqu'elles sont juxtaposées dans l'assemblage des barres.

Bien que non indiquées dans les directives de la question, des élèves ont cru nécessaire d'utiliser une autre façon de répondre en déterminant le volume du prisme droit régulier à base hexagonale. En effet, 33,3 % des élèves ont procédé au calcul de volume de ce prisme. Ainsi, nous avons des éléments de réponse à notre 1^{re} question de recherche où ces élèves ont utilisé leurs connaissances spatiales pour calculer le volume, venant ainsi confirmer qu'il n'y avait pas d'espace vide entre chacune des 6 barres Toblerone.

b) Discussion sur la tâche 2 : pauvre Octaèdre!

Les *questions a et b* sont liées à l'habileté à visualiser mentalement les nouvelles faces quant à leur forme, leur nombre ainsi que déterminer le nombre de sommets et d'arêtes à la suite de la troncature de l'octaèdre. D'après nos résultats, nous avons des éléments de réponse à notre 2^e question de recherche : *quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?*

Les taux de réussite à la *question a* (35,7 %) et à la *question b* (35,7 %) révèlent que la capacité à mener les visualisations interne et externe a constitué une difficulté majeure chez les élèves. Une cause possible est de ne pas avoir eu d'objets physiques à leur portée, donc qu'ils ne pouvaient pas exercer leur capacité à visualiser directement l'octaèdre tronqué.

Les recherches de Parzysz (1989, 1991, 1993), Colmez et Parzysz (1993) ainsi que de Bonafé (1998) sur la visualisation en géométrie, viennent renforcer notre cadre théorique en montrant

pourquoi la visualisation spatiale détient un rôle crucial dans l'élaboration des représentations des objets 3D : que ce soit des objets physiques, à partir de figures 3D déjà représentées selon telle technique ou encore en l'absence d'objets que l'on doit imaginer mentalement, le « voir dans l'espace » cause problème aux élèves, qui éprouvent des difficultés à utiliser le dessin pour appuyer leur raisonnement.

Dans la tâche 2, l'élève avait accès uniquement à une représentation en perspective cavalière d'un octaèdre. En conséquence, il a été contraint de mobiliser la compétence de visualisation spatiale, d'abord la visualisation externe à partir des coupes selon les points ABCD et d'imaginer les autres coupes selon les autres points sur la représentation 2D de l'octaèdre, en élaborant des images mentales dynamiques, en les combinant et en les analysant. Dans ce processus de visualisation complexe, l'élève a donc dû décomposer les 8 faces triangulaires de l'octaèdre pour faire apparaître mentalement d'abord les 6 faces carrées, puis les 8 faces hexagonales.

D'après notre grille d'analyse 4.2, (voir section 4.3.2), le processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) qui relève principalement de la visualisation interne, s'est avérée une difficulté importante parce que, d'une part, l'élève devait réaliser une analyse mathématique de l'octaèdre tronqué et de ses constituants en les décomposant mentalement, c'est-à-dire en imaginant les nouvelles faces, leur forme, leurs dimensions et leur nombre ; et d'autre part, parce qu'il devait reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D. Ceci a impliqué la création, l'organisation et la structuration d'images mentales des parties de l'octaèdre tronqué, et a exigé de l'élève une perception et une visualisation spatiales sûres et bien développées. L'élève a ainsi dû visualiser les nouvelles faces formées par troncature en chaque sommet, mais a aussi dû arriver à « voir » ce que devenaient les faces initialement dans l'octaèdre, après transformation par la troncature. Il devait, peut-être par des mouvements de rotation pensés mentalement ou encore de façon purement abstraite, « combinatoire », arriver à reconstituer combien de faces restait et combien de nouvelles faces étaient constituées, et devait être capable de comprendre ou « voir » mentalement l'effet sur le nombre de sommet et d'arêtes.

Cette même visualisation devait permettre à l'élève de poursuivre la démarche de résolution de problème pour calculer le volume de l'octaèdre tronqué par soustraction des volumes de l'octaèdre de celui du volume des 6 « petites pyramides » droites à base carrée. Le calcul du volume de l'octaèdre lui-même supposait qu'on soit capable de le « voir » comme deux pyramides à base carrée réunies le long de leurs bases respectives. L'élève devait pour cela repérer et identifier d'abord mentalement, puis peut-être inscrire sur la représentation 2D du questionnaire ou sur une représentation en perspective cavalière qu'il aurait produite, les éléments de la formule de volume de la pyramide droite (hauteur, apothème, « demi-côté » de la base carrée). La visualisation devait alors être combinée aux compétences géométriques pour repérer : le découpage de l'octaèdre initial en deux pyramides à bases carrées ; où se situe la hauteur de ces deux pyramides ; où aller chercher les éléments nécessaires pour calculer cette hauteur à l'aide du Théorème de Pythagore ; repérer comment appliquer le Théorème de Thalès pour déduire la hauteur des petites pyramides à enlever à cause de la troncature.

Nous avons obtenu des éléments de réponse à notre 3^e question de recherche: *Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume?*

- Mobiliser des connaissances spatiales telles qu'être capable de percevoir les découpages dans l'octaèdre tronqué, c'est-à-dire, d'une part, de percevoir que ce solide est formé par la juxtaposition le long d'une base commune de 2 pyramides droites à base carrée isométriques et d'autre part, de percevoir que le découpage selon les 6 plans aura pour effet de créer 6 « petites » pyramides droites à base carrée.
- Une difficulté à visualiser mentalement les éléments de la formule de volume d'une pyramide droite régulière à base carrée tel que le « demi-côté » de la base carrée, la hauteur ainsi que l'apothème de la pyramide, a mené ces élèves à des interprétations erronées dans l'application de la relation de Pythagore dans l'espace et conséquemment à produire un calcul erroné du volume de la pyramide.

- La difficulté à visualiser mentalement les coupes dans l'octaèdre (75 % des productions écrites – voir chapitre 4 section 4.3.2) a constitué un point névralgique pour élaborer une représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué.
- L'interdépendance entre la visualisation mentale et les connaissances spatiales a donc exigé de l'élève une élaboration et une coordination de ces images mentales dans la maîtrise des règles des représentations d'objets 3D en perspective cavalière.
- La compréhension de la relation d'incidence a permis à l'élève de déduire des informations spatiales afin qu'il puisse continuer sa démarche de calcul de volume des 6 « petites » pyramides droites à base carrée.

Question c : Dessine un développement plan de ce nouveau polyèdre.

Étant donné le taux très faible de réussite à la *question c* – tâche 2, soit 7,1 %, nous mettons en évidence que la visualisation interne a constitué une difficulté majeure. Dans le tableau 4.3 (voir chapitre 4), 67,9 % des élèves (soit 19 sur 28) ont vécu des difficultés soit de visualisation interne, soit de conflit cognitif « vu/su » (informations spatiales non prises en compte) ou encore une combinaison des deux.

Ainsi, nous avons des éléments de réponse pour notre 2^e question de recherche : *quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?*

D'abord, nous avons montré dans le chapitre *Résultats* (voir section 4.3.2 *question c*) que dans ce type de tâche, une variable est déterminante : le fait d'avoir ou non à sa disposition l'objet dont il faut construire le patron. En effet, l'élève a d'abord perçu spatialement une représentation en perspective cavalière de l'octaèdre. Il lui a été impossible de la manipuler ni de tourner autour. Il a été contraint alors d'utiliser sa capacité de visualisation interne, s'imaginer ce qu'il y a derrière, « voir mentalement » l'adjacente de certaines arêtes, des faces, ainsi que l'alignement de certains sommets, l'incidence de certaines arêtes et la coplanarité de certaines faces. Ainsi, la déconstruction dimensionnelle pouvait être amorcée :

chercher des éléments structuraux de dimension 2 (organisation, assemblage des faces entre elles), de dimension 1 (disposition et nombre d'arêtes), puis de dimension 0 (nombre de sommets).

Deux types des difficultés vécues par les élèves à la *question c* (voir chapitre 4 tableau 4.3), soit le conflit cognitif « vu/su » et une combinaison de la visualisation interne avec le conflit cognitif « vu/su » se sont manifestés dans 67,9 % des productions écrites (19 élèves sur 28). Nous dégagons que ces résultats montrent l'existence d'un point névralgique entre le « passage » de la visualisation interne par l'élaboration d'images mentales des coupes produites dans l'octaèdre et le processus d'encodage qui s'en est suivi (prises en compte ou non d'informations spatiales : nombre de faces et leur forme (carré et hexagone), nombre de côtés, nombre de sommets) pour produire le développement plan de l'octaèdre tronqué.

Les rôles de la visualisation interne dans le processus d'encodage de l'octaèdre tronqué pour le représenter en développement plan sont aussi intimement liés à la capacité de comprendre les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. De plus, ces relations sont difficiles à visualiser dans les coupes effectuées au tiers de chaque arête de l'octaèdre parce qu'il y a certaines faces qui sont cachées dans la représentation 2D de l'octaèdre fourni avec le questionnaire de la tâche. Qui plus est, la maîtrise d'autres connaissances spatiales telles que les techniques de représentation des objets de l'espace entre en jeu dans ces relations.

Réponse à notre 3^e question de recherche : *Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?*

Puisque ces élèves ont eu de la difficulté à utiliser leur visualisation mentale pour identifier des informations clés apparaissant lors des coupes dans l'octaèdre (6 carrés dont l'arête mesure 2 cm et 8 hexagones dont le côté est de 2 cm), cela a eu comme conséquence d'amener ces élèves à produire des erreurs dans la production du développement plan de l'octaèdre tronqué. Ce qui suggère l'existence d'une corrélation forte entre l'habileté à

visualiser mentalement un objet 3D (images mentales dynamiques) et l'élaboration d'un développement plan dans lequel l'élève a procédé à l'identification d'informations clés. En conséquence, il y a interdépendance entre la compétence de visualisation spatiale de ces informations clés et certaines connaissances spatiales se manifestant par la capacité de produire la représentation 2D en développement plan.

En l'occurrence, nous déduisons qu'une visualisation mentale « suffisamment développée » s'avère un atout important pour calculer le volume de l'octaèdre tronqué. En effet, nos résultats montrent que les élèves ayant réussi les questions spécifiques à la visualisation de la tâche 2 ont calculé correctement le volume de l'octaèdre tronqué. Or, ils représentent seulement 7,1 % des productions écrites. Ainsi, nous pouvons dégager un lien étroit entre le traitement du calcul du volume de l'octaèdre tronqué et l'habileté de visualisation spatiale (interne) des constituants du solide. De plus, ces élèves avaient tous inscrit sur leur développement plan les informations clés dont ils avaient besoin pour procéder au calcul du volume, soit la hauteur, l'apothème et le côté du carré formant les bases des « petites » pyramides droites à base carrée.

Question d : Représente, avec la règle usuelle de 30 cm, ce nouveau solide en perspective cavalière et en perspective à 1 point de fuite

Dans la réalisation de la représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué, nous avons présenté dans le chapitre *Résultats* une difficulté chez les élèves à comprendre et à visualiser la relation d'incidence pour certaines arêtes et certaines faces adjacentes à cause de la capacité de reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D (octaèdre). Or, comme le présente le tableau 4.3 (voir chapitre 4), la mise en œuvre de la visualisation interne ainsi que le conflit cognitif « vu/su » (non prise en compte d'informations spatiales clés) ont constitué des difficultés majeures pour cette question d. En effet, 20 élèves sur 28, soit 71,4 %, ont éprouvé ces difficultés. Dans notre étude, nous dégagons que la visualisation spatiale pourrait passer par la capacité à mettre en œuvre une « structuration spatiale », due en bonne partie à une bonne compréhension des

relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité (faces, arêtes et sommets), mais aussi à la capacité de visualiser le squelette (les structures 0D et 1D) du solide.

Nous avons donc des éléments de réponse à notre 3^e question de recherche : *Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume?*

La capacité de visualiser mentalement un objet 3D non présent physiquement (tel l'octaèdre tronqué de la tâche 2) s'exerce de manière interdépendante avec la maîtrise de certaines connaissances spatiales telles que les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace (voir chapitre 4, section 4.3.2, *question c*). Ainsi, le rôle de la visualisation interne consiste non seulement à créer, à combiner et à analyser des images mentales dynamiques du solide, par exemple imaginer que les 6 faces carrées sont disposées selon tels axes de rotation et adjacentes à d'autres faces qui sont hexagonales, mais aussi à analyser les propriétés et les mouvements de ces images mentales selon différents points de vue (de face, de droite, de dessus, de gauche, etc.) dans l'objectif d'élaborer une représentation en perspective cavalière et en perspective à 1 point de fuite. Cette interdépendance s'est aussi dégagée dans la tâche 1 pour la *question c* (développement plan) et la *question d* (perspective cavalière d'un prisme droit à base hexagonale).

Puisque nous avons argumenté antérieurement (voir *Problématique*, section 1.3.2) que la visualisation mentale qui est exigée est hautement sophistiquée, entre autres parce que certaines parties du solide sont cachées dans la représentation 2D de l'octaèdre, nous dégageons que la visualisation spatiale exige un entraînement spécifique chez l'élève, afin qu'il puisse développer cette compétence quand il a à produire des représentations d'objets 3D (perspective cavalière, perspective à 1 point de fuite, développement plan).

La capacité d'élaborer des représentations en perspective (cavalière et à 1 point de fuite) de l'octaèdre tronqué, permet à l'élève de rendre visible sur la feuille de papier et de placer aux bons endroits les éléments de la formule de volume de la pyramide droite à base carrée, c'est-

à-dire de repérer où sont situés le « demi-côté » de la base carrée, l'apothème de la pyramide et la hauteur du solide (voir figure 5.1). L'élève doit donc utiliser ses connaissances spatiales, puisque l'octaèdre constitue deux pyramides droites régulières juxtaposées le long de leurs bases. Ainsi, la visualisation spatiale est interdépendante avec les connaissances spatiales en jeu, puisqu'elle assure une coordination des images mentales dans le respect des règles des représentations en perspective.

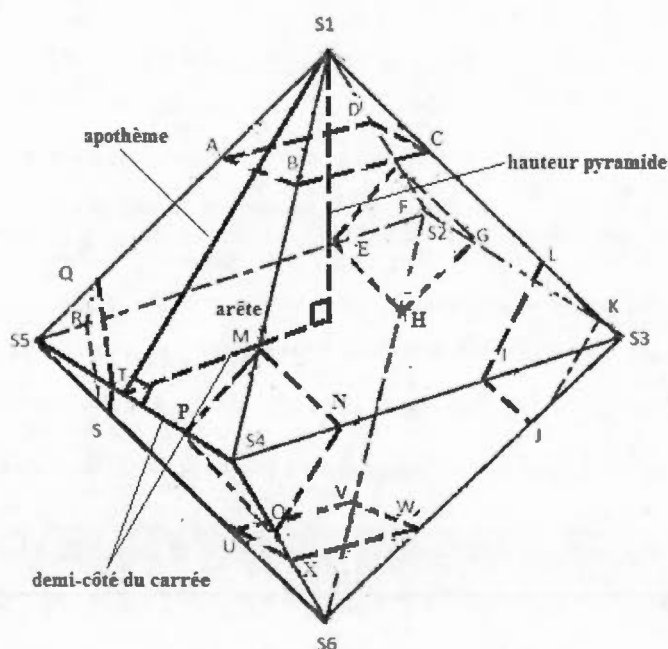


Figure 5.1 Visualisation spatiale et repérage de triangles rectangles

Nous dégageons une relation importante, à savoir que l'habileté à visualiser mentalement les coupes dans l'octaèdre a été très utile parce que les représentations mentales qui en ont résulté ont permis à l'élève de produire convenablement une représentation en perspective cavalière, à condition qu'il ait développé une bonne maîtrise des règles de cette technique. Nous dégageons également qu'une fois dessiné l'octaèdre tronqué, la visualisation externe est intervenue pour faciliter l'identification et le repérage des constituants du solide, dont l'élève a eu besoin pour procéder au calcul de volume de l'octaèdre tronqué.

Cela vient confirmer ce que nous avons exposé dans notre cadre théorique à travers les études menées par Janvier (1994) et reprises par Tanguay (2010), où ces chercheurs avaient élaboré une démarche cherchant à minimiser les difficultés des élèves face au concept de volume.

Plus spécifiquement, dans le processus de calcul de volume de l'octaèdre tronqué, l'élève ne connaît pas la formule de volume de ce solide. Ainsi, il a été contraint de procéder par soustraction de volume de l'octaèdre avec le volume des 6 « petites » pyramides droites à base carrée détachées de l'octaèdre. Or, dans ce processus, la visualisation interne et externe ont été forcément mobilisées, puisque l'élève a dû créer des images mentales à partir de la représentation 2D de l'octaèdre fournie avec le questionnaire de la tâche.

Question e : Calcule le volume résultant formé par le nouveau solide, sachant que la mesure du côté d'un des triangles équilatéraux dans le polyèdre de départ est de 6 cm.

Le faible taux de réussite de la *question e* pourrait s'expliquer de deux manières. D'abord, nous avons montré par nos résultats sur les questions des tâches 1 et 2 se rapportant spécifiquement à la visualisation interne que la majorité des élèves ont éprouvé une difficulté importante se manifestant, entre autres, par une compréhension inadéquate des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. Dans la communauté de chercheurs, les études de Battista (1999, 2003), Colmez et Parzysz (1993), Parzysz (1991) viennent appuyer nos résultats montrant l'existence d'un lien entre la visualisation spatiale et la compréhension de la structure du solide pour en calculer son volume. Une deuxième manière expliquant un faible taux de réussite concerne la complexité de la visualisation spatiale dans les sections de coupes sur l'octaèdre.

En conséquence, un élément nouveau apporté à notre domaine de recherche montre qu'il existe un lien étroit entre les habiletés de visualisation spatiale (interne et externe), les connaissances spatiales relatives au volume et l'habileté à dessiner des objets 3D par des techniques de représentation. Cela nous amène à penser que les capacités de visualisation spatiale et certaines connaissances spatiales — entre autres, les techniques de représentation en perspective cavalière — constituent un élément prédictif de la performance des élèves

dans des tâches de résolution de problèmes contenant des calculs de volume de solides décomposables. Cette constatation suggère donc que l'amélioration des capacités spatiales des élèves pourrait entraîner une amélioration du processus d'application des formules de volumes.

c) Discussion sur la tâche 3 : la tour décomposable

Question a : Calcule les dimensions de chaque pièce et leur volume respectif

Discussion sur deux difficultés : erreur due au contrat didactique et conflit « vu/su »

Dans le décodage des vues de dessus des 4 objets de la tâche 3 (pyramide droite à base carrée, prisme droit à base rectangulaire, cube et cylindre droit), il y a présence d'une propriété géométrique que nous qualifions d'information clé : soit que la hauteur de la base rectangulaire du prisme droit n'est pas isométrique aux hauteurs des bases respectives de la pyramide droite à base carrée, du cube et du diamètre du cylindre droit. En effet, cette information spatiale sert à déterminer d'autres mesures manquantes des solides (hauteur de la pyramide, hauteur du cube, hauteur du cylindre et rayon du cylindre). Pour certains élèves (29,0 %), le mauvais décodage de cette information est dû à une mauvaise interprétation du « contrat didactique », suscité par le dessin représentant les vues de dessus des 4 solides de la tour. En effet ces élèves ont interprété comme allant de soi que des dimensions si proches dans la représentation fournie dans l'énoncé pouvaient être considérées comme étant les mêmes. Cette mauvaise interprétation du « contrat didactique » les a conduits à procéder à un calcul de volume erroné. On peut penser également que les « petits traits » (voir figure 5.2) signalant des segments isométriques a pu conforter cette interprétation. Le fait qu'il y ait eu des mesures manquantes, à trouver à travers des calculs relativement complexes, a pu également encourager certains de ces élèves à considérer que les dimensions en cause étaient les mêmes.

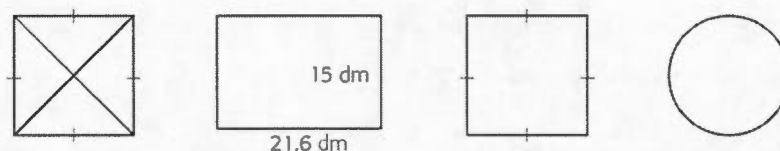


Figure 5.2 Décodage d'une information clé : « petits traits » signifiant « isométrie »

En l'occurrence, nous pouvons dégager un lien important entre l'habileté de visualisation spatiale et le processus de décodage qui doit être réalisé par l'élève en présence d'une représentation 2D d'un objet 3D. Un décodage réalisé adéquatement pourrait minimiser les difficultés dont nous avons discuté dans notre problématique et notre cadre théorique (voir sections 1.2 et 2.4). Ce qui pourrait signifier qu'il y aurait interdépendance entre les connaissances spatiales (techniques de représentation des objets 3D) et la visualisation spatiale dans le décodage d'une représentation d'un objet 3D amenant un élément de réponse à notre 3^e question de recherche.

Nous avons aussi obtenu des éléments de réponse à notre 2^e question de recherche pour la *question a – tâche 3: Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?*

Ainsi, dans la *question a*, où l'élève devait calculer les dimensions de chacun des 4 objets, il devait mobiliser ses connaissances spatiales antérieures (voir cadre théorique 2.2.3) en ayant recours à la visualisation externe des vues de dessus de ces objets pour déterminer les mesures manquantes dont il avait besoin pour résoudre la tâche. En l'occurrence, la visualisation spatiale a agi en interdépendance avec les connaissances spatiales mentionnées précédemment pour que puisse se poursuivre le processus de calcul de volume des 4 solides.

Question b : *représente en perspective cavalière, la Tour, en indiquant les dimensions de chacune des pièces qui la compose.*

La mauvaise interprétation de la consigne due au contrat didactique (hauteur étant considérée la même pour les 4 solides de la tour, soit 15 dm) a conduit certains élèves (29,0 %) à produire des erreurs dans le calcul de mesures manquantes (hauteurs des 4 solides et rayon du cylindre). Plus spécifiquement, ces élèves avaient besoin des hauteurs pour calculer le volume et comme ils ne savaient pas où et comment les trouver, ils se sont rajouté des hypothèses qui n'étaient pas dans la tâche 3, mais qui permettaient de donner une mesure aux hauteurs. En conséquence, ces erreurs ont mené ces élèves à produire une représentation en perspective cavalière de la tour qui était erronée.

Nous allons maintenant examiner des facteurs qui auraient pu avoir une incidence sur les résultats de notre étude.

5.2 Limites de l'étude

Bien que plusieurs résultats notables aient été révélés dans cette étude, certaines limites ont besoin d'être reconnues.

5.2.1 La collecte des données

En ce qui a trait à la tâche 2, nous avons identifié des limites importantes. D'abord, cette tâche était trop difficile pour les élèves de 3^e secondaire, mal calibrée et aurait dû comporter des éléments donnant accès aux élèves au moins à des solutions partielles. Par exemple, suggérer aux élèves de décalquer l'octaèdre dessiné dans le questionnaire et de travailler à partir de ce décalque. Dans la production de la représentation en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué, les élèves ne sont pas habitués de dessiner des objets 3D d'une telle complexité. Nous-mêmes, en tant qu'enseignant expérimenté, nous avons dû reprendre à 3 reprises la représentation en perspective cavalière de ce solide.

De plus, nous avons mal évalué le temps prescrit pour compléter la tâche 2. En effet, étant donné le niveau de difficulté élevé de cette tâche, il aurait été judicieux que les élèves aient 150 minutes au lieu des 75 minutes allouées pour réaliser la tâche. Cette limite méthodologique pourrait expliquer, du moins en partie, pour certains élèves, l'absence de traces de démarche écrites pour les *questions d* et *e* de cette tâche. Nous y reviendrons dans une section ultérieure.

La manière dont nous avons construit la tâche 3 constitue une autre limite méthodologique. Une difficulté est apparue dans 29,0 % des productions écrites, soit une mauvaise interprétation due au contrat didactique. Cela s'est produit dans le décodage des vues de dessus des 4 objets formant la tour (voir *infra* figure 5.2, p. 281). Ainsi apparaît une limite méthodologique quant au choix (en tant que variables didactiques) des dimensions pour les objets 3D formant la tour décomposable, qui a été pédagogiquement maladroite, parce que non seulement il a induit l'erreur que les bases des 4 solides pouvaient être de la même dimension, mais qu'en plus, ces dimensions sont tellement proches que la représentation en perspective cavalière a été très difficile à réaliser, puisque certains solides dépassent d'à peine quelques millimètres des autres. Lorsque nous avons élaboré la tâche 3, nous pensions que le dessin des vues de dessus des 4 objets ne poserait pas problème. Or, il aurait fallu être plus circonspect dans le choix du dessin fourni aux élèves, parce que les dimensions y étaient très proches, et cela a conduit au conflit à propos du contrat didactique qui a eu un impact sur les résultats de cette tâche.

5.2.2 L'absence de certaines données liée à la durée de passation des tâches

Nous précisons que certains élèves, soit ont laissé des traces écrites insuffisantes, soit ont écrit une réponse valable mais sans une démarche de raisonnement explicite. En conséquence, nous n'avons pu analyser leurs productions écrites selon nos grilles d'analyse et cela a pu avoir eu une incidence sur l'interprétation des résultats. En ce qui concerne les tâches 1 et 3, l'absence de données n'est pas significative. Ainsi, cela n'a pas eu d'impact sur

notre étude. Pour la tâche 2, nous constatons qu'il y a une absence de données élevée à la *question d* : en effet, soit 92,9 % des élèves n'ont pas donné de représentation en perspective à 1 point de fuite de l'octaèdre tronqué. C'est bien sûr à combiner avec la difficulté de la tâche. Cela a eu des répercussions sur la *question e*, où l'on demandait aux élèves de calculer le volume du solide en cause et à laquelle 75 % des élèves n'ont pas répondu. Nous dégageons cette répercussion de l'absence de représentation sur le calcul du volume constitue un élément de réponses à deux de nos questions de recherche : soit la première, sur le rôle des connaissances spatiales dans une bonne application des formules de volume ; et la deuxième, sur les rôles de la visualisation dans une tâche de résolution de problème de volume d'un solide (voir section 5.1.1 b). Nous faisons en effet l'hypothèse que c'est l'absence de représentation qui a bloqué les élèves dans le calcul du volume, les élèves étant alors incapables de repérer les données nécessaires à l'application de la formule.

Qui plus est, dans notre chapitre *Méthodologie*, nous avons expliqué pourquoi nous avons construit cette tâche avec un niveau de difficulté élevé : démontrer que pour calculer le volume d'un solide décomposable complexe tel qu'un octaèdre tronqué, cela exige une maîtrise de l'habileté « visualisation spatiale » autant externe qu'interne, ainsi que certaines connaissances spatiales, dont la capacité à produire des représentations 2D d'objets 3D.

5.2.3 L'analyse des données selon le modèle du conflit cognitif « vu/su »

L'outil de cueillette de données « productions écrites d'élèves » s'est avéré efficace. Toutefois, nous avons analysé les réponses obtenues aux 3 tâches une tâche à la fois, c'est-à-dire en les décortiquant question par question. Cette manière de procéder a été longue et laborieuse parce qu'elle a nécessité une analyse rigoureuse de nos résultats en les confrontant à notre cadre théorique, soit celui faisant intervenir le conflit cognitif « vu/su » (Parzysz, 1988). Or, il est arrivé à quelques occasions que nous n'ayons pu traiter les données avec ce cadre d'analyse. Parfois, nos analyses ont été dégagées à partir de considérations s'éloignant de notre cadre théorique, c'est-à-dire que nous avons été contraints d'aller voir dans la littérature scientifique d'autres concepts théoriques permettant d'expliquer nos résultats. Par exemple, en ce qui concerne le rôle de la visualisation interne dans le processus d'encodage

des représentations 2D des objets 3D, tel que le développement plan d'un prisme droit à base trapézoïdale (tâche 1) et la perspective cavalière de l'octaèdre tronqué (tâche 2), nous avons eu recours à un concept de Duval (2005), en l'occurrence la déconstruction dimensionnelle des formes. Ainsi, ce concept est venu renforcer notre cadre théorique.

Dans le prochain chapitre, nous allons présenter les conclusions de notre étude, c'est-à-dire un résumé des réponses apportées aux questions de recherche, dégager des éléments nouveaux au domaine d'étude, exposer des recommandations et présenter une piste pour une recherche ultérieure.

CONCLUSION

Dans cette section, nous allons présenter les conclusions de la recherche en montrant qu'ils sont en cohérence avec les résultats obtenus. Dans un 1^{er} temps, nous rappelons notre problème de recherche auquel nous voulions apporter des éléments de réponse.

Les rôles des connaissances spatiales, de la perception spatiale et de la visualisation spatiale dans la compréhension du concept de volume et des formules de volume relatives aux solides usuels est souvent négligé dans l'enseignement secondaire. Des pratiques et des études antérieures (Clements & Battista, 1992 ; Marchand, 2006 ; Janvier, 1992, 1994, 1997 ; Pallascio, Papillon et Dion., 1985, 1986, 1990 ; Pallascio, Talbot, Allaire et Mongeau, 1990, Gutiérrez, 1992 ; Parzysz, 1988, 1989, 1991 ; Grenier et Tanguay, 2010 ; Anwandter-Cuellar, 2013) ont souligné les difficultés qu'éprouvent les élèves et même les enseignants lors d'activités qui font appel aux connaissances spatiales, à la perception spatiale ainsi qu'à la visualisation spatiale (externe et interne), par exemple dans le calcul de volumes.

Par ce problème de recherche, nous avons formulé trois questions de recherche pour lesquels nous avons obtenu des éléments de réponse, témoignant de connaissances nouvelles qui pourront contribuer au développement de la didactique des mathématiques comme domaine scientifique.

6.1 Retour sur les questions de la recherche

6.1.1 Des réponses à la 1^{re} question de recherche : Quels sont les rôles des connaissances spatiales dans une « bonne » application des formules de volumes de solides usuels ?

En ce qui concerne la tâche 1, il y a un lien spécifique entre l'élaboration d'une représentation 2D d'un objet 3D (solide) par des techniques de représentation (perspective

cavalière, perspective à 1 point de fuite, développement plan) et le processus de calcul de volume. Notre étude révèle que dans une démarche d'apprentissage d'une bonne application des formules de volume, la capacité de dessiner l'objet 3D par une technique de représentation se révèle fort utile à l'élève, car elle lui facilite, d'une part le repérage en ayant recours à la visualisation spatiale, des éléments de la formule apparaissant dans la représentation 2D, et d'autre part elle permet à l'élève de « raisonner » à propos de la formule de volume. Cela nous amène à proposer l'énoncé suivant.

- i) Premier apport de notre étude : les habiletés de visualisation spatiale et certaines connaissances spatiales (techniques de représentation des objets 3D) constituent des éléments importants, prédicateurs de la réussite de tâches de résolution de problème dans le traitement des formules de volume des solides.

Nous avons montré, au chapitre *Discussion*, qu'un élève ne pourra travailler sur le dessin d'un objet 3D que s'il a élaboré de « bonnes » images mentales de cet objet et aussi, des connaissances spatiales adéquates des règles de représentation lui permettant de le dessiner adéquatement. Notre argumentation corrobore les études de Colmez et Parzysz (1993), Parzysz (1989, 1991), ainsi que Bonafé (1992).

De plus, il émerge de nos résultats que l'habileté de visualisation interne est plus sophistiquée que l'habileté de visualisation externe et par conséquent, plus difficile à maîtriser due à la compréhension de certaines connaissances spatiales dont les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. Par exemple, en ce qui concerne la visualisation interne de l'octaèdre tronqué (tâche 2), l'élève a dû mobiliser sa capacité à créer une série d'images mentales dynamiques (arêtes, sommets, faces) lors de la troncature, d'analyser ces images, de les combiner et de les structurer dans l'espace. D'autre part, cette même structuration spatiale a permis d'encoder des informations-clés (forme et nombre de faces, nombre d'arêtes et de sommets) en vue de produire des représentations 2D en développement plan et en perspective (cavalière et à 1 point de fuite) de l'octaèdre tronqué.

Notre argumentation suggère donc que l'amélioration de ces capacités spatiales, notamment de visualisation interne, pourrait entraîner une amélioration du processus d'application des formules de volume chez les élèves. Cela nous révèle donc un 2^e élément, apport de notre étude.

- ii) Deuxième apport de notre étude : la capacité à comprendre (décodage) et à être capable de produire des représentations 2D d'objets 3D (perspective cavalière, perspective à 1 point de fuite, développement plan, vues de face, de droite, de dessus, etc.) constitue un atout majeur dans une démarche d'apprentissage des formules de volume.

Une des hypothèses exposées dans notre problématique s'est confirmée, à savoir que les habiletés de représentation spatiale d'un solide (objet 3D) constituent une condition nécessaire (mais pas nécessairement suffisante) à un traitement adéquat du volume dans des tâches de résolution de problème.

Dans l'analyse de la tâche 1 (voir chapitre 4 au tableau 4.2), les élèves ayant eu de la difficulté à calculer le volume du prisme droit à base trapézoïdale (*question d*) ont également éprouvé des difficultés à utiliser l'habileté de visualisation spatiale, ainsi qu'une difficulté à dessiner le solide convenablement selon les techniques de représentation. Qui plus est, parmi les difficultés que nous avons identifiées chez les 7 élèves ayant produit un calcul de volume erroné, la difficulté à repérer les éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale du prisme droit à base trapézoïdale revient à 5 reprises. En conséquence, la capacité à comprendre et à produire des représentations 2D d'objet 3D a joué un rôle déterminant chez ces élèves.

Dans l'analyse des tâches 2 et 3, nous nous questionnons s'il est possible que la difficulté à effectuer un calcul de volume de l'octaèdre tronqué (tâche 2) et la difficulté à déterminer une mesure manquante dans le processus d'application de la bonne formule de volume des solides (tâche 3) sont liées à une difficulté à produire des représentations en développement plan et

en perspective cavalière de l'octaèdre tronqué et des 4 objets composant la tour décomposable. Il faudrait explorer plus à fond cette question.

Quant aux élèves qui ont réussi les 3 tâches, lorsqu'ils ont procédé à l'application des formules de volume (prisme droit à base trapézoïdale, prisme droit à base hexagonale, pyramide droite à base carrée, etc.), ils avaient tous préalablement réalisé convenablement des représentations en perspective cavalière, en perspective à 1 point de fuite, et en développement plan.

Dans l'analyse des résultats, nous avons constaté une difficulté chez plusieurs élèves à percevoir les coupes dans l'octaèdre sur la représentation en perspective de l'octaèdre, combinée à une mauvaise gestion des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité dans l'espace. Nos résultats ont montré que ces relations permettent à l'élève de déduire certaines informations spatiales clés qui sont nécessaires, entre autres, pour déterminer le développement plan. Nous faisons l'hypothèse qu'elles facilitent de plus le repérage des segments à considérer pour le calcul du volume des deux pyramides droites à base carrée juxtaposées le long de leur base pour former l'octaèdre, ainsi que pour le calcul du volume des six « petites » pyramides droites à base carrée qui seront détachées de l'octaèdre après les coupes. Ces segments à considérer sont l'arête de la pyramide, la hauteur, l'apothème et le « demi-côté » du carré formant la base, autant dans les deux grandes pyramides que dans les petites.

Les résultats obtenus à la *question b* – tâche 3 sont révélateurs quant à l'habileté à dessiner convenablement en perspective cavalière les 4 objets géométriques assemblés l'un par-dessus l'autre. En effet, la capacité à produire une représentation en perspective cavalière s'est révélée être la principale difficulté (48,4 %). Nous précisons que cette difficulté s'est surtout manifestée à travers le non-respect d'une règle, qui est celle de la conservation des rapports de longueurs dans la représentation 2D.

De plus, mis à part le conflit dû à une mauvaise interprétation du contrat didactique, nous avons montré que pour certains élèves, le décodage des vues de dessus des 4 objets 3D

fournis par le questionnaire de la tâche 3 a été nécessaire pour déterminer des mesures manquantes (hauteurs respectives de la pyramide droite à base carrée, du cube, du cylindre et de son rayon), dont l'élève avait besoin pour traiter les volumes de ces solides. De plus, ce décodage d'information a eu un effet sur l'encodage de la figure 3D (tour décomposable) à représenter en 2D selon les techniques de dessin (perspective cavalière, notamment). Ainsi, la capacité à élaborer une représentation 2D en perspective cavalière de la tour décomposable est étroitement liée à l'habileté à comprendre ainsi qu'à décoder les vues de dessus, de dessous, etc., des 4 solides formant la tour. Cela nous amène aux 2^e et 3^e questions de recherche.

6.1.2 Des réponses à la deuxième et à la troisième question de recherche

Quels sont les rôles de la visualisation et de la perception spatiales dans les tâches de résolution de problème de volume, notamment quand la tâche fait intervenir le décodage ou l'encodage de l'objet 3D dans une représentation 2D ?

Comment l'interdépendance entre les connaissances spatiales et la visualisation se manifeste-t-elle dans les démarches des élèves qui résolvent un problème de volume ?

Pour la tâche 1, la perception spatiale et la visualisation ne posent pas une difficulté importante en présence d'un objet physique tel qu'une barre de chocolat Toblerone ou un solide décomposable (prisme droit à base trapézoïdale ou à base hexagonale) parce que l'élève visualise directement les composants sur ces objets. Ainsi, nos résultats ont montré l'existence d'une corrélation forte entre la visualisation externe d'un objet 3D et l'identification de ses constituants.

Il y a difficulté lorsque l'élève est en présence d'une représentation 2D d'un objet 3D dessiné selon telle ou telle technique de représentation. Cette difficulté se révèle de deux manières : d'une part, par la manifestation d'un conflit cognitif « vu/su » (6 % des élèves de la question c par le développement plan du prisme droit à base trapézoïdale) et d'autre part, se

manifestant par la visualisation interne (soit 12,1 % pour la *question c*). Cette même difficulté est liée à la perception spatiale de la représentation 2D, car elle concerne d'abord la forme globale de l'objet 3D en le reconnaissant d'un seul « coup d'œil ». De plus, le recours à la visualisation spatiale (externe et interne) est facilitante car elle permet d'établir des liens entre des parties spécifiques de l'objet 3D, en amorçant leur analyse, favorisant ainsi un repérage des éléments de la formule de volume dans la représentation spatiale. Si l'élève est capable de comprendre (processus de décodage) quelles informations n'ont pas été prises en compte dans ce repérage, alors il aura bien mobilisé les habiletés « visualisation spatiale » et « connaissances spatiales ». Cela nous amène à un 3^e apport de notre étude.

- i) Troisième apport de notre étude : l'habileté « visualisation spatiale » se révèle nécessaire dans les processus de repérage d'informations clés (constituants d'un objet 3D), d'encodage et d'élaboration des représentations 2D des objets de l'espace.

La difficulté à visualiser spatialement est liée à la capacité de produire des représentations en perspective cavalière, en perspective à 1 point de fuite et en développement plan. Nous avons montré qu'elle se produit dans la coordination des images mentales issues de la visualisation interne avec la maîtrise des conventions des dessins en perspective où se met en branle une véritable dialectique entre le *vu* et le *su* de l'objet 3D. En effet, nous avons décelé dans les productions écrites de certains élèves de la tâche 1, une prégnance du *vu* sur le *su* ou prégnance du *su* sur le *vu*, dans une représentation 2D d'un objet 3D. Nous croyons que la prise en compte du rôle ambigu, et pourtant essentiel, du *vu* est ici fondamentale.

- ii) Quatrième apport de notre étude : l'ajout d'un concept venant bonifier notre cadre théorique, soit la déconstruction dimensionnelle des formes (Duval, 2005), qui relève principalement de la visualisation interne, mais aussi externe dans une moindre mesure.

Pour les tâches 1 et 2, nos résultats ont montré que la capacité à représenter des objets 3D par les dessins 2D des développements plans est directement liée à la capacité des élèves à

combiner et analyser les images mentales et à mener mentalement la déconstruction dimensionnelle. Celle-ci relève donc principalement de la visualisation interne, mais également de la visualisation externe à travers laquelle l'élève repère sur l'objet 3D les arêtes partagées par deux faces, les sommets partagés par plusieurs arêtes, et les positions relatives de ces éléments (voir chapitre 4 section 4.3.1 *question c* ; 4.3.2 *question c*).

Dans la tâche 2, le processus de déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005), s'est avérée une difficulté importante parce que, d'une part, l'élève a dû effectuer une analyse mathématique de l'octaèdre tronqué et de ses constituants en les décomposant mentalement, c'est-à-dire en imaginant les nouvelles faces, leur forme, leurs dimensions et leur nombre ; et d'autre part, parce qu'il devait reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D. En conséquence, la création, l'organisation et la structuration de ces images mentales des parties de l'octaèdre tronquées ont exigé de l'élève une perception et une visualisation spatiales sûres et bien développées.

De plus, cette même visualisation devait aider l'élève à poursuivre sa démarche pour calculer le volume de l'octaèdre tronqué par soustraction des volumes de l'octaèdre de celui du volume des 6 « petites pyramides » droites à base carrée. L'élève devait pour cela repérer et identifier à l'aide de la visualisation mentale, puis peut-être inscrire sur la représentation de l'octaèdre du questionnaire ou sur une représentation en perspective cavalière qu'il aurait réalisée, les éléments de la formule de volume de la pyramide droite à base carrée (hauteur, apothème, « demi-côté » de la base carrée). La visualisation devait alors être combinée aux compétences géométriques pour repérer : le découpage de l'octaèdre initial en deux pyramides droites à bases carrées ; où se situe la hauteur de ces deux pyramides ; où aller chercher les éléments nécessaires pour calculer cette hauteur à l'aide du Théorème de Pythagore ; repérer comment appliquer le Théorème de Thalès pour déduire la hauteur des petites pyramides à enlever à cause de la troncature.

- iii) Cinquième apport de notre étude: la visualisation mentale et le décodage d'un objet 3D exigent un entraînement spécifique.

Nous avons montré dans notre problématique et notre cadre théorique que les trois habiletés « perception spatiale », « visualisation spatiale » et « connaissances spatiales » nécessitent un entraînement pour se développer par l'entremise de tâches spécifiques. Dans le traitement du volume et de ses formules, nous avons dégagé que pour créer des apprentissages plus significatifs chez les élèves, il est nécessaire que ceux-ci soient confrontés à des tâches complexes de visualisation spatiale. Dans le chapitre *Discussion*, nous avons suggéré des exemples de tâches mobilisant ces trois habiletés avec des solides décomposables plus complexes que ceux présentés dans les manuels d'élèves.

De plus, nous avons montré que les élèves qui « savent voir » et « raisonner » dans l'espace, sont ceux qui ont à leur disposition des représentations mentales sur lesquelles ils peuvent opérer. De plus, ces mêmes élèves ont procédé au bon décodage d'informations clés dont ils avaient besoin pour assurer un traitement adéquat de la formule de volume.

- iv) Sixième apport de notre étude : dans l'apprentissage de la géométrie tridimensionnelle, un enseignement explicite des règles de représentations des objets 3D ainsi qu'un enseignement explicite des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité est souvent nécessaire au traitement adéquat des problèmes de volume.

En conséquence, nous dégageons que les enseignants jouent un rôle important dans le développement des habiletés de visualisation spatiale et de connaissances spatiales chez les élèves en géométrie tridimensionnelle.

Quant au développement de la visualisation spatiale, nous croyons fortement qu'il faut provoquer, voire stimuler par l'enseignement explicite, des tâches de résolution de problème où cette habileté constituerait une méthode de résolution privilégiée. Or, les manuels scolaires contiennent une quantité limitée d'activités portant sur le développement de la visualisation interne des objets 3D. Il faudrait donc s'assurer de trouver de nouvelles tâches et

activités pouvant amener les élèves à développer les capacités de visualisation spatiale et de connaissances spatiales.

6.2 Les implications de cette recherche

6.2.1 Première recommandation

Afin d'améliorer les habiletés « perception spatiale », visualisation spatiale » et « connaissances spatiales » dans l'apprentissage du volume des solides et de leurs formules, il s'avère essentiel de le faire par un entraînement à l'aide de situations problèmes variées contenant des solides décomposables complexes. De plus, les règles de représentation des objets de l'espace doivent faire l'objet d'un enseignement explicite afin d'aider l'élève à prendre conscience des différences entre l'objet 3D et sa représentation planaire.

Nos résultats ont révélé que l'habileté de visualisation spatiale a constitué une difficulté importante pour plusieurs élèves, principalement dans les tâches 2 et 3 et, dans une moindre mesure, dans la tâche 1 (voir chapitre 4 aux tableaux 4.2, 4.3 et 4.4), à la fois dans le décodage d'informations clés apparaissant dans une représentation 2D d'un objet 3D et dans l'encodage pour produire une représentation 2D selon les techniques de représentation.

Afin de favoriser un développement des habiletés que nous avons explicitées dans notre problématique et notre cadre théorique à savoir, la perception spatiale, la visualisation ainsi que les connaissances spatiales dans l'application des formules de volume, l'enseignement de la géométrie spatiale doit utiliser des situations problèmes variées avec des solides « complexes » où l'élève est dans l'obligation de recourir à ces habiletés pour poursuivre son raisonnement lorsqu'il doit calculer le volume de ces solides.

Nous avons déjà donné des exemples d'objets 3D plus difficiles à visualiser mentalement à cause de la structuration spatiale des faces, des arêtes et des sommets, tels que certains des solides de Platon (octaèdre, icosaèdre, dodécaèdre), ces mêmes solides tronqués, ainsi que certaines bipyramides, afin d'exercer et de développer les habiletés spatiales susnommées. Une résolution de problème comporterait au moins un de ces solides réguliers ou un de ces

solides tronqués, où la tâche à réaliser serait d'en calculer le volume en exigeant de le représenter par des techniques de représentations (perspective cavalière, développement plan, vue de dessus, de face, de droite, etc.) afin de procéder au repérage d'informations clés dans la représentation 2D, permettant à l'élève d'étayer son raisonnement spatial dans la détermination du volume de l'objet 3D.

Ainsi, nous dégagons que le développement des habiletés spatiales doit être favorisé par un enseignement explicite au secondaire, en utilisant une approche progressive en passant par des phases de manipulation de solides physiques, également de construction des solides (style *Polydrons Frameworks*), forçant l'emploi de la visualisation externe de l'objet physique, combinée à l'élaboration de représentations dessinées sur papier ou sur un écran d'ordinateur, phases qui seraient suivies de l'élaboration des dessins sans la présence de l'objet.

6.2.2 Deuxième recommandation

Dans l'enseignement des formules de volume, il faut accorder une place prépondérante à l'habileté de « visualisation interne » parce qu'elle est intimement liée à la capacité de structurer l'espace, et parce qu'elle est aussi liée au processus d'encodage d'informations clés qui seront dessinées dans la représentation 2D.

À partir des difficultés vécues par les élèves dans les 3 tâches de résolution de problème, nous avons dégagé que la visualisation spatiale (interne) pourrait passer par la capacité à mettre en œuvre une « structuration spatiale », due avant tout à une bonne compréhension de propriétés des relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité (faces, arêtes et sommets). De plus, cette même visualisation permet de créer des images mentales du solide et de ses constituants (hauteur du prisme droit à base trapézoïdale de la tâche 1), de dessiner une représentation 2D d'un objet 3D (octaèdre tronqué de la tâche 2) qui aide l'élève à repérer la présence de triangles rectangles (arête de la pyramide droite à base carrée, apothème de cette pyramide, « demi-côté » du carré de la base) permettant de déterminer des mesures manquantes (apothème et hauteur de la pyramide à base carrée pour la tâche 2) dans le calcul du volume, comme c'est le cas par exemple pour l'octaèdre tronqué.

De plus, nous avons montré que la capacité à reconstituer mentalement des parties du solide qui sont cachées dans la représentation 2D, ou dont les angles ou les longueurs ne sont pas isomorphiquement représentés en 2D (octaèdre tronqué de la tâche 2) relève aussi de la visualisation interne et qu'elle se révèle sophistiquée. Il en est ainsi de la capacité à comprendre les développements plans et les projections orthogonales d'un objet 3D, relevant également de la visualisation interne.

Ainsi, nous pouvons dégager que la capacité à comprendre les relations d'incidence, d'adjacente, d'alignement et de coplanarité des objets 3D est interdépendante de l'habileté de visualisation interne, et la combinaison des deux habiletés permet d'assurer un traitement adéquat des formules de volume. En effet, comprendre ces relations facilitent l'encodage d'informations clés (constituants d'un solide, par exemple) qui seront nécessaires lors de la production d'une représentation 2D pour que soit possible la visualisation directe sur le dessin produit des éléments de la formule de volume.

6.3 Piste pour une recherche ultérieure

En fait, nous proposons une piste pour une recherche ultérieure qui se révèle une 3^e recommandation :

Étant donné le peu de recherches dans la communauté des chercheurs s'intéressant spécifiquement aux rôles de la perception spatiale, de la visualisation spatiale et des connaissances spatiales pour traiter adéquatement le volume et ses formules, nous recommandons de mener d'autres études sur ce domaine, par exemple avec l'emploi de logiciels de géométrie dynamique (Geogebra, Cabri 3D, etc.), afin de produire de nouvelles connaissances scientifiques.

À quelques occasions, nous avons utilisé le concept de « déconstruction dimensionnelle des formes » de Duval (2005), qui nous a permis d'argumenter en quoi l'habileté de visualisation interne est utile dans le processus d'apprentissage de l'élève en géométrie de l'espace, notamment dans l'élaboration de représentations d'objets 3D en développements plans ainsi qu'en perspective cavalière.

En conséquence, il serait pertinent de mener une recherche ayant notre domaine d'étude pour thème, afin d'investiguer si la déconstruction dimensionnelle des formes peut être utile à la compréhension du volume et de ses formules, et de vérifier si l'usage de logiciels de géométrie dynamique (Geogebra, Cabri 3D, etc.) peut permettre de développer davantage l'habileté de visualisation spatiale chez l'élève du secondaire.

BIBLIOGRAPHIE

- Anwandter-Cuellar, N. (2013). Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume, *Petit x*, 93, 53-75.
- Arsac, G. (1989). *La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans*, PME XIII, Paris, 85-93.
- Artigue, M. (1988). Ingénierie didactique. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 9(3), 281-308.
- Aspra, J., Marmier, A.M. et Martinez, I. (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques. Rigueurs, erreurs et raisonnements. De l'étude des solides à la construction de l'espace*. Institut national de recherche pédagogique. Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand (IREM), 109-146.
- Audibert, G. (1992). L'espace en géométrie, *Topologie structurale*, 18, 49-62.
- Baracs, J., Dion, D., Pallascio, R. et Papillon, V. (1983). Vers une définition opératoire de la perception spatiale, *Bulletin AMQ*, 23(4), 8-14.
- Baracs, J. (1987). Exercices de perception structurale, *Bulletin AMQ*, 27(3), 40-45.
- Baracs, J. (1987). Exercices de perception structurale (2^e partie), *Bulletin AMQ*, 27(4), 20-23.
- Baracs, J. (1992). Douze exercices de perception spatiale, *Topologie Structurale*, 18, 61-66.
- Baracs, J. (1992). Le développement de la perception structurale à l'aide de projections, *Topologie Structurale*, 19, 41-70.
- Baracs, J. et Pallascio, R. (1981). Le développement de la perception spatiale, *Bulletin AMQ*, 21(4), 5-11.
- Baruk, S. (2000). *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Paris.
- Battista, M.T., Wheatley, G.H. et Talsma, G. (1982). The importance of spatial visualization and cognitive development for geometry learning in preservice elementary teachers, *Journal for Research in Mathematics Education*, 13(5), 332-340.

- Battista, M.T. et Clements, D.H. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
- Battista, M.T., Clements, D.H., Arnoff, J., Battista, K. et Van Auken Borrow, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares, *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532.
- Battista, M.T. (1999). Fifth graders' enumeration of cubes in 3D arrays : conceptual progress in an inquiry-based classroom, *Journal for research in Mathematics Education*, 30(4), 417-448.
- Battista, M.T. (2004). Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 185-204.
- Bayart, C., Gos, C., Hindelang, C., Keyling, M.A., Ortlieb, M., Rauscher, J.C. et Roesch, G. (1998), Voir et raisonner dans l'espace : à la conquête de l'espace au collège, *Repères – IREM*, 33, 19-36.
- Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire, *Grand N*, 64, (37-59).
- Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire* (Thèse de doctorat). IREM, Université Sciences et Technologies-Bordeaux I.
- Bertinelli, B. (2007). Problèmes de géométrie dans l'espace, *Actes/Atti Bard 2007*, 105-118.
- Bessot, A. et Vérillon, P. (1993). *Espace graphique et graphismes d'espace. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux*, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- Bessot, A. (1993). *Représentations graphiques et maîtrise des rapports avec l'espace*. Conférence publique organisée par le CIRADE et le département de mathématiques et informatique, Publication de l'UQAM, Montréal.
- Bishop, A.J. (1983). *Space and geometry*. Dans R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processess*. New-York : Academics Press.
- Bishop, A.J. (1988). *A review of research on visualization in mathematics education*. Dans A. Barbas (Ed.), *Proceedings of the 12th PME International conférence*, 1, 170-176.
- Bkouche, R. et Soufflet, M. (1983). Axiomatique, formalisme, théorie. *Bulletin Inter-Irem* « Enseignement de la géométrie » (23), 3-24.

- Bonafé, F. et Sauter, M. (1998). Enseigner la géométrie dans l'espace. *Repères-IREM*, (33), 5-18.
- Boublil-Ekimova, H.(2010). Lacunes géométriques des futurs enseignants, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 97-118.
- Brousseau, G. (1988). L'enseignement de la géométrie, IREM de Bordeaux, *Bulletin AMQ*, 27(3), 12-14.
- Brousseau, G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie, *Séminaire de Didactique des Mathématiques*, Rethymon, 1-24.
- Butler, D.L. (1982). Predicting the perception of three dimensional objects from the geometrical information in drauwings, *Journal of Experimental Psychology. Human Perception and Performance*, 8(5), 674-692.
- Clements, D. (2003). *Learning and teaching measurement*, 2003 yearbook, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 122-142.
- Clements, D.M. et Battista, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning. Dans D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New-York: MacMillan Publishing Compagny, 1-312.
- Clements, D. et Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*, New York, NY: Routledge, 1-363.
- Colmez, F., Parzysz, B. et Thomas, C. (1992). L'enseignement de la géométrie dans l'espace en BTS d'arts appliqués, *Repères IREM*, 9, 73-98.
- Colmez, F. et Parzysz, B. (1993). Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde, *Espaces graphiques et graphiques d'espace. Contributions de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon), La Pensée Sauvage, Grenoble, 35-55.
- CREM (1995). *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans – Essai d'élaboration d'un cadre global pour l'enseignement des mathématiques*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.
- CREM (1999). *Formes et mouvements–Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.
- CREM (2001). *Formes et mouvements*, Lismont, L. et Rouche, N., coordinateurs, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles.

- Dion, D., Pallascio, R. et Papillon, V. (1985). Perception structurale d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, 25(3), 10-21.
- Dion, D., Pallascio, R. et Papillon, V. (1986). Activités d'entraînement à la perception structurale d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, 26(1), 28-32
- Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics, *Visualization in teaching and learning mathematics*, 25-37.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. *Advanced mathematical thinking*. Springer Netherlands (Eds.), 25-41
- Dreyfus, T., et Kidron, I. (2010). Justification enlightenment and combining constructions of knowledge, *Educational Studies in Mathematics*, 75, 75-93.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65
- Duval, R. (2002). *Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning*. Dans F. Hitt et M. Santos (Eds.), Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico, 1, 3-26.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements, *Annales de Didactique et Sciences Cognitives*, IREM de Strasbourg, 10, 5-53.
- Duval, R. (2006). The cognitive Analysis of Problems of comprehension in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.
- Eisenberg, T. et Dreyfus, T. (1991). Spatial visualization in the mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 1-5
- Fortin, M.F. (2010). *Fondements et étapes du processus de recherche. Méthodes quantitatives et qualitatives*. (2^e éd.). Montréal, : Chenelière Éducation.
- Furtuna, D. (2008). *Modélisation dans l'espace : obstacles du passage du 2D au 3D*. (Mémoire de maîtrise). Université du Québec à Montréal.
- Furtuna, D. (2010). *Géométrie du plan - Géométrie de l'espace : continuité ou rupture dans le contrat didactique ?*, Actes de l'ACFAS 2010. Moncton (N.-B.).

- Furtuna, D., Tanguay, D. et Jonnaert, Ph. (2012). Vers la co-construction d'une démarche d'apprentissage de la géométrie de l'espace au secondaire, Dans Hitt, F. et Cortés, C. (dir.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques*, 286-296
- Gaudreau, L. (2011). *Guide pratique pour créer et évaluer une recherche scientifique en éducation*. Guérin Éditeur, Montréal
- Grenier, D. et Tanguay, D. (2008). L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers, *Petit x*, 78, 26-52.
- Guinet, R. et Verjus, M. (1984). À propos du concept de volume, *Grand N*, 32, 67-75.
- Gutiérrez, A. (1992). Exploration des liens entre les niveaux de Van Hiele et la géométrie tridimensionnelle, *Topologie structurale*, 18, 31-48.
- Hughes-Hallett, D. (1991). *Visualization and calculus reform*. Dans W. Zimmermann et S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 121-126). Washington, DC: Mathematical Association of America
- Houdement, C. et Huzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de Didactique et de sciences cognitives*, vol. XI, IREM de Strasbourg.
- Inhelder, B. et Piaget, J. (1970). *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Paris: PUF.
- Janvier, C. (1992). Le volume comme instrument de conceptualisation de l'espace, *Topologie structurale*, 18, 63-76.
- Janvier, C. (1994). *Le volume, mais où sont les formules?*, Modulo Éditeur, Mont-Royal, 1-83.
- Janvier, C. (1997). Grandeur et mesure : la place des formules à partir de l'exemple du volume, *Bulletin AMQ*, 37(3), 28-41.
- Jones, K et Bills, C. (1998). *Visualization, imagery and the development of geometrical reasoning*. Proceeding of the British Society for Research into Learning Mathematics, 18 (1 et 2), 123-128.
- Karsenti, T. et Savoie-Zajc, L. (2004). *La recherche en éducation : étapes et approches*, Sherbrooke : Éditions CRP.
- Laborde C. et Capponi B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14/1.2, 165-210.

- Lunkenbein, D., Allard, H. et Goupille, C. (1983). Structuration intérieure d'objets géométriques dans la genèse d'idées spatial, *Revue des sciences de l'éducation*, 9(1), 55-84.
- Marchand, P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions?, *Annales de Didactique des Sciences Cognitives*, 11, 103-121.
- Marchand, P. (2009). L'enseignement du sens spatial au secondaire : Analyse de deux leçons de troisième secondaire, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 29-48.
- Martin Casalderry, F. (2011). *La mystification des sens. L'art sous le regard mathématique*. Éditions RBA, Espagne.
- Mesquita, A.L. (1992). Les types d'appréhension en géométrie structurale : esquisse d'une recherche, *Topologie structurale*, 18, 19-30.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport [MELS] (2007) *Programme de formation de l'école québécoise. Enseignement secondaire, deuxième cycle. Domaine de la mathématique, de la science et de la technologie*. Québec.
- Miller, S.P. et Mercer, C.D. (1993). Using data to learn concrete-semiconcrete-abstract instruction for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice*, 8, 89-96.
- Mithalal, J. (2010). *Déconstruction instrumentale et déconstruction dimensionnelle dans le contexte de la géométrie dynamique tridimensionnelle*. (Thèse de Doctorat). Université de Grenoble.
- Mongeau, P., Pallascio, R. et Allaire, R. (1995). Le développement des compétences spatiales géométriques, *Topologie structurale*, 21, 15-24.
- Pallascio, R., Papillon, V. et Dion, D. (1985). Activités d'entraînement à la perception structurale d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, 25(4), 30-35
- Pallascio, R., Papillon, V. et Dion, D. (1986). Typologie des habiletés perceptives d'objets polyédriques, *Bulletin AMQ*, 26 (3), 11-16.
- Pallascio, R., Papillon, V. et Dion, D. (1986). Activités d'entraînement à la perception structurale d'objets polyédriques : III. Classification des symétries, *Bulletin AMQ*, 26(2), 28-32.

- Pallascio, R., Talbot, L., Allaire, R. et Mongeau, P. (1990). L'incidence de l'environnement sur la perception et la représentation d'objets géométriques, *Revue des sciences de l'éducation*, 26 (1), 77-90.
- Pallascio, R., Allaire, R. et Mongeau, P. (1992). Représentation de l'espace et enseignement de la géométrie, *Topologie structurale*, 19, 71-82.
- Pallascio, R. (1997). Observations de représentations géométriques et spatiales dans un contexte d'acculturation mathématique, *Actes du colloque GDM*, 193-209.
- Parzysz, B. (1988). « Knowing vs. Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures », *Educational Studies in Mathematics* 19(1), 79-92.
- Parzysz, B. (1989). *Représentations planes et géométrie de l'espace au lycée. Contribution à la relation voir/savoir*. (Thèse de doctorat). IREM, Université Paris-7.
- Parzysz, B. (1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 11(23), 211-240.
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 575-593.
- Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il ?, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n°17, GRIM, Department of Mathematics, University of Palermo, Italy, 128-151.
- Piaget, J. et Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Presmeg, N.C. (1985). *The role of visually mediated processes in high school mathematics : A classroom investigation*. Unpublished Ph.D. dissertation, Cambridge University, England.
- Presmeg, N.C. (1986a). Visualization and Mathematical giftedness, *Educational Studies in Mathematics*, 17, 291-311.
- Presmeg, N.C. (1986b). Visualization in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 6(3), 42-46.
- Presmeg, N.C. (1991). *Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics*, Dans F. Furinghetti (ed.), *Proceedings of 15th PME International Conference*, 3, 191-198

- Presmeg, N.C. (1992). Prototypes, metaphors, metonyming and imaginative rationality in high school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 595-610
- Presmeg, N.C. (1997a). *Reasoning with metaphors and metonymies in mathematics learning*. Dans L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning : Analogie, metaphors and images*, 267-279, Mahwah, NJ :Erlbaum.
- Presmeg, N.C. (2006), *Research on visualization in learning and teaching mathematics*, Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education : Past, Present and Future. PME 1976-2006. Ed. Sense Publishers, 205-235.
- Pittalis, M., Mousoulides, N. et Christou, C. (2004). *Students' 3D Geometry thinking profiles*, Department of Education, University of Cyprus Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France, INRP 2010, 815-825
- Sealander, K. A., Johnson, G. R., Lockwood, A. B. et Medina, C. M. (2012). Concrete-semiconcrete-abstract (CSA) instruction: A decision rule for improving instructional efficacy. *Assessment for Effective Intervention*, 38(1), 53-65.
- Sousa, David A. (2006). *Un cerveau pour apprendre les mathématiques : Mieux comprendre le fonctionnement du cerveau pour enseigner les mathématiques plus efficacement*, Chenelière Éducation.
- Tanguay, D. (2009). Le volume de la pyramide, *Envol*, 149, 9-19.
- Tanguay, D. (2010). Les formules de volume et le principe de Cavalieri, *Petit x*, 84, 7-26.
- Van der Maren, J.-M. (1995). *Méthodes de recherche pour l'éducation*. Montréal : Presses de l'Université de Montréal.
- Vergnaud, G., Ricco, G., Rouchier, A., Des-moulières, S., Landré, C., Marthe, P., Samurçay, R., Rogalski, J. et Viala, A. (1983), Didactique et acquisition du concept de volume, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, La Pensée Sauvage, 4(1), 1-132.
- Vergnaud, G.(1986). Conceptualisation de l'espace et mathématiques, *Technologies, Idéologies, Pratiques* 5-4/6-1, 91-94.
- Whiteley, W. (1996). *Representing geometric objects, Learning and Geometry : computational approaches*, D. Kueker and C. Smith (Eds.), Rickhauser, 143-178.
- Yakimanskaya, I.S. (1991). The development of spatial thinking in schoolchildren. *Soviet Studies in Mathematics Education*, vol. 3, NCTM : Reston, USA.